Analysis I

Alessandra Iozzi

July 14, 2020.

Contents

CHAPTER 1

Preface

CHAPTER 2

Preface

Dies sind die LaTeX Notizen des Kurses *Analyse I*, den A. Iozzi im D-ITET an der ETH in H13, H14 und H18 unterrichtet hat. Einige Teile dieser Notizen und einige Bilder werden fast wörtlich aus [?], [?] und [?] übernommen.

CHAPTER 3

Grundbegriffe

Dieses Kurs handelt von vielen verschiedenen Aspekten und verschiedenen Eigenschaften von Funktionen. Man hat vielleicht schon in der Schule viele von diesen Begriffen gelernt, wir werden aber in diesem Kurs einem präziseren Zugang nehmen. Deshalb werden wir mit Logik und Mengen anfangen.

3.1. Mathematische Logik

3.1.1. Aussagen, Aussagenformen, Quantoren.

Definition 3.1. Eine *Aussage* ist eine mathematische Bahauptung, die entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel 3.2.
(1) Die Temperatur beträgt heut 40°.
(2) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

Wir können gegebene Aussagen A und B mithilfe von logischen Operationen verbinden

$\Rightarrow$	bedeutet "hat zur Folge"
$\Leftrightarrow$	bedeutet "genau dann, wenn"
$\vee$	bedeutet "oder" (nicht exclusiv, d.h. oder/und)
$\wedge$	bedeutet "und"
$\neg$	bedeutet "nicht"

Beispiel 3.3.
(1) "n ist eine Primzahl, die strikt grösser als 2 ist" $\Rightarrow$ "n ist ungerade".
(2) "n ist eine Primzahl" $\Leftrightarrow$ " falls $n|a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow n|a$ oder $n|b$".
(3) "Es regnet und ich habe keinen Regenschirm" = "Es regnet" $\wedge$ "ich habe keinen Regenschirm".
(4) "n ist gerade" $= \neg$"n ist ungerade",

Eine Aussage kann auch abhängig von einer Variable x sein (das ist in Blatters Skript "Aussageform" genannt). Ob diese Aussage wahr ist oder nicht, hängt vom Wert von x ab.

Beispiel 3.4.
(1) $(1-x)(1+x) = 1-x^2$
(2) $x^2 - 5x + 6 = 0$

In Zusammenhang von Aussagenformen treten weitere Zeichen auf (die *Quantoren*).

$\forall$	bedeutet "für jedes"
$\exists$	bedeutet "es gibt"
$\exists!$	bedeutet "es gibt genau ein"
$\nexists$	bedeutet "es gibt kein"

Wir können dann Aussagen formen

Beispiel 3.5. (1) $\forall x$ gilt $(1-x)(1+x) = 1-x^2$ (wahr)
(2) $\exists!\ x\colon (1-x)(1+x) = 1-x^2$ (falsch)
(3) $\nexists\, x\colon (1-x)(1+x) = 1-x^2$ (falsch)
(4) $\forall\, x$ gilt $x^2 - 5x + 6 = 0$ (falsch)
(5) $\exists\, x\colon x^2 - 5x + 6 = 0$ (wahr)
(6) $\exists!\ x\colon x^2 - 5x + 6 = 0$ (falsch)
(7) $\nexists\, x\colon x^2 - 5x + 6 = 0$ (falsch)

Vorsicht. Zwei gleiche Quantoren dürfen vertauscht werden. Verschiedene Quantoren dürfen nicht hingegen auf keinen Fall vertauscht werden.

Beispiel 3.6.
Die Aussage

$$\forall n \geq 1 \text{ und } \forall c \geq 0\ \exists!\, \xi \geq 0 \text{ so, dass } \xi^n = c$$

ist äquivalent zu

$$\forall c \geq 0 \text{ und } \forall n \geq 1\, \exists!\, \xi \geq 0 \text{ so, dass } \xi^n = c\,.$$

Aber die Aussagen

$$\exists!\, \xi \geq 0 \text{ so, dass } \forall c \geq 0 \text{ und } \forall n \geq 1 : \xi^n = c$$

oder

$$\forall n \geq 1\, \exists!\, \xi \geq 0 \text{ so, dass } \forall c \geq 0 : \xi^n = c$$

sind falsch.

Beispiel 3.7 (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit komplezen Koeffizienten a_k besitzt wenigstens eine Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\forall p(z)\ \exists\, \zeta \text{ so, dass } p(\zeta) = 0\,.$$

Wir können aber nicht

$$\exists\, \zeta \text{ so, dass } \forall p(z),\ p(\zeta) = 0$$

schreiben, weil die Ausgabe " Es gibt eine komplexe Zahl ζ so, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten and der Stelle ζ den Wert 0 hat" falsch ist.

3.1.2. Gleichheitszeichen. Wir haben schon hier zwei verschiedenen Bedeutungen vom Gleicheitszeichen gesehen. Es ist nützlich verschiedenen Zeichen zu benutzen.

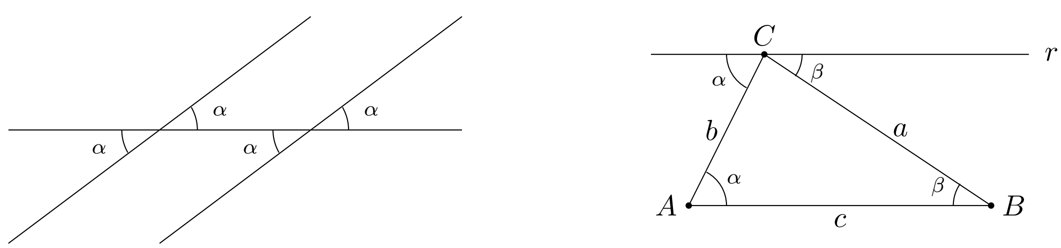
Beispiel 3.8.
(1) $(1-x)(1+x) = 1-x^2$ gilt für alle Werte von x. Dann schreiben wir $(1-x)(1+x) \equiv 1-x^2$.
(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ ist eine Definition. Das Zeichen "e" an der rechte Seite ist durch die linke Seite definiert. In diesem Fall schreiben wir
$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$
(3) Die Gleichung $(1-x)(1+x) = 0$ wird nur für bestimmten Werte von x ($x = 1$ and $x = -1$) erfüllt.

3.1.3. Beweisen. Gegebene sei eine Aussage. Um zu entscheiden, ob die Aussage wahr ist, müssen wir einen *Beweis* finden. Ein Beweis ist eine Kette von logischen Schlussfolgerungen, die die Wahrheit einer Aussage auf als wahr Angenommenes zurückführen.

Es gibt verschiedene Arten vom Beweis, unter anderen: direkter Beweis, indirekter Beweis, Kontraposition, Induktion.

3.1.3.1. *Direkter Beweis.*

Beispiel 3.9. Wir möchten beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Wir benutzen das folgende Axiom[1]: "Wechselwinkel an Parallelen sind gleich."



Wir zeichnen die Gerade r durch einen Eckpunkt und parallel zur gegenüberliegenden Seite. Der Winkeln an C beträgt 180°. Aber der Winkel zwischen r und b is α, weil er und α Wechselwinkel an Parallelen sind. Gleichermassen ist der Winkel zwischen r und a gleich β. Daraus folgt die Aussage zu bewiesen.

3.1.3.2. *Indirekter Beweis.* Falls wir die Aussage A beweisen möchten, beweisen wir bei einem indirekter Beweis, dass A nicht falsch sein kann. Das heisst, beweisen wir, dass das Gegenteil von A nicht wahr sein kann. Ein indirekter Beweis ist sehr

[1]Ein Axiom oder Postulat ist eine Aussage, die als wahr angenommen wird, um als Voraussetzung oder Ausgangspunkt für weitere Überlegungen und Argumente zu dienen.

ähnlich einem direkter Beweise: der Unterschied ist am Anfang und am Ende, die Methoden zur Verfügung sind aber gleich.

Beispiel 3.10. Wir möchten die Aussage

$$A = \text{“}\sqrt{2} \text{ ist eine irrationale Zahl”}$$

beweisen. Wir nehmen an, dass A falsch ist. Das Gegenteil von A is

$$\neg A = \text{“}\sqrt{2} \text{ is rational”},$$

d.h.

$$\neg A = \text{“}\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p, q \text{ ganze Zahlen sind”}\,.$$

Wir nehmen an, dass p und q nicht beide gerade sind (sonst $p = 2p'$, $q = 2q'$ und $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$ und wir können diese Prozedure wiederholen, bis wann eine der ganze Zahlen nicht gerade ist). Aus der Gleichung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ folgt, dass

$$\sqrt{2}q = p$$

und deshalb

$$2q^2 = p^2\,.$$

Daraus folgt, dass p^2 gerade ist, deswegen p gerade ist, $p = 2p'$. Dann

$$p = 2p' \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2\,.$$

Daraus aber folgt, dass q auch gerade ist, und das ist ein Wiederspruch.

3.1.3.3. *Umkehrung eines Schlussfolgerung.*

Vorsicht. Normalerweise ist die Aussage $A \Rightarrow B$ nicht äquivalent zur Aussage $B \Rightarrow A$.

Beispiel 3.11. Seien $A =$ “n ist eine Primzahl, die strikt grösser als 2 ist” und $B =$ “n ist ungerade”. Dann gilt $A \Rightarrow B$ aber $B \not\Rightarrow A$. Zum Beispiel $n = 1$ und $n = 9$ sind ungerade aber keine Primzahlen.

3.1.3.4. *Kontraposition.* Nehmen wir an, dass wir die Aussage $A \Rightarrow B$ beweisen möchten. Manchmal ist es leichter, die äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu beweisen. Wir müssen aber zuerst bewiesen, dass die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind äquivalent

Lemma 3.12. *Seien A und B Aussagen, Dann ist*

$$\text{“}A \Rightarrow B\text{”} \Leftrightarrow \text{“}\neg B \Rightarrow \neg A\text{”}\,.$$

Proof. ($\Rightarrow$) Nehmen wir an, dass $A \Rightarrow B$. Wir möchten beweisen, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$. Unsere Voraussetzungen sind deshalb (i) $A \Rightarrow B$ und (ii) $\neg B$ ist wahr. Dann muss A unbedingt falsch sein. In der Tat, wenn A wahr wäre, dann wäre aus (i) auch B wahr. Da A falsch ist, ist $\neg A$ wahr. Wir haben so gesehen, dass

$$(A \Rightarrow B) \quad \Rightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)\,.$$

($\Leftarrow$) Wir benutzen, was wir gerade bewiesen haben, statt mit $\neg B$ (bzw. $\neg A$) statt A (bzw. B)

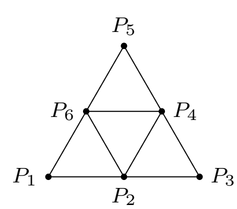
$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \Rightarrow \quad (\underbrace{\neg\neg A}_{=A} \Rightarrow \underbrace{\neg\neg B}_{=B})\,.$$

Wir haben deshalb die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen. $\square$

Beispiel 3.13. Wir betrachten ein gleichseitigen Dreieck D der Seitenlänge 2 in der Ebene und wir haben eine Vorrat an gleichseitig Dreiecken der Seitenlange $\ell < 2$. Wir möchten das grösse Dreieck mithilfe von kleinen Dreiecken überdecken und wir betrachten die folgende zwei Aussagen:

$$\begin{aligned} A &= \text{“}D \text{ lässt sich mit 5 kleinen Dreiecken überdecken”} \\ B &= \text{“}D \text{ lässt sich mit 4 kleinen Dreiecken überdecken”}\,. \end{aligned}$$

Wir möchten beweisen, dass $A \Leftrightarrow B$ und wir müssen deshalb die zwei Aussagen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ beweisen. Es ist klar, dass $B \Rightarrow A$. Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, werden die Kontraposition dieser Aussage beweisen, d. h. $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wir nehmen an, dass D sich nicht mit 4 kleinen Dreiecken überdecken lässt. Daraus folgt, dass die Seitenlänge ℓ der kleinen Dreiecke kleiner als 1 ist. In der Tat, kann man ein Dreieck der Seitenlänge 2 mit Hilfe von 4 Dreiecken der Seitenlänge 1 überdecken.



Wi betrachten jetzt diese sechs Punkte $P_1, \ldots, P_6$. Jedes Dreieck der Seitenlänge $\ell < 1$ kann nur einen Punkt überdecken. Der Dreieck D hat sechs derartige Punkte, deshalb reichen 5 Dreiecke nicht.

In diesem Beispiel war es einfach die Negation der Aussage “D lässt sich mit 4 kleinen Dreiecke überdecken” zu erhalten. Manchmal ist die Negation einer Aussage schwieriger.

3.1.4. Negation.

Beispiel 3.14. Falls

$$A = \text{“}x \text{ ist eine gerade Zahl”}\,,$$

ist

$$\neg A = \text{“}x \text{ is keine gerade Zahl”} = \text{“}x \text{ ist ungerade”}\,.$$

Falls eine Aussage die Verbindung von zwei Aussagen ist, ist die Negation ein bisschen komplizierter.

Beispiel 3.15. Betrachten wir die folgende Aussagen:

$$A = \text{“ es regnet und ich habe keinen Regenschirm”}$$

und

$$B = \text{“ ich werde nass werden”}\,.$$

Es ist logisch, dass $A \Rightarrow B$, oder (wie in § 3.1.3.4 bemerkt) $\neg B \Rightarrow \neg A$, wobei

$$\begin{aligned} \neg B &= \text{“ich werde nicht nass werden”} \\ \neg A &= \text{“es regnet nicht” oder “ ich habe einen Regenschirm”}\,. \end{aligned}$$

Um präzis zu sein, schreiben wir $A = A_1 \wedge A_2$, wobei

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{“es regnet”} \\ A_2 &= \text{“ich habe keinen Regenschirm”}\,. \end{aligned}$$

Dann ist $\neg A = \neg A_1 \vee \neg A_2$, wobei $\vee =$ oder.

Beispiel 3.16. Wir können die Aussage $A =$ “n ist eine Primzahl, die strikt grösser als 2 ist” asl $A = A_1 \wedge A_2$ schreiben, wobei

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{“}n \text{ ist eine Primzahl”} \\ A_2 &= \text{“}n \text{ ist strikt grösser als 2”}\,. \end{aligned}$$

Dann

$$\neg A = \neg A_1 \vee \neg A_2 = \text{“}n \text{ sit keine Primzahl” oder “}n \leq 2\text{”}\,.$$

3.2. Mengen

Wir werden keine echte Mengeleher treiben. Wir werden nur die auf Menge bezüglichen Schreibweisen und Bezeichnungen festlegen.

Notation. Seien A, B Mengen:

(1) $\varnothing$ ist die *leere Menge*, dass heisst die Menge, die keine Elemente enthält;
(2) “$x \in A$” bedeutet, dass x ein Element von A ist;
(3) “$A \subset B$” bedeutet, dass jedes Element der Menge A ein Element der Menge B ist, oder A ist eine *Teilmenge* von B;
(4) “$A = B$” bedeutet, dass $A \subset B$ und $B \subset A$; insbesondere “$A = \varnothing$” bedeutet, dass A kein Element enthält;

(5) falls $A(x)$ eine Aussageform ist, bezeichnet $\{x : A(x)\}$ die Menge der Element x, für die $A(x)$ zutrifft.

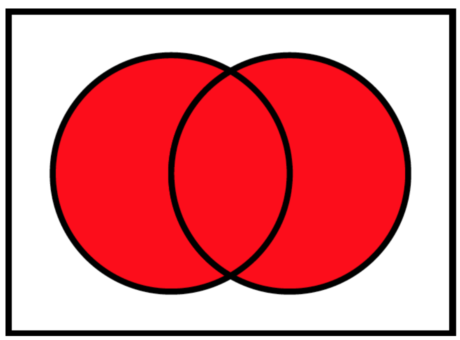
Beispiel 3.17. (1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$;
(2) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 0\} = \varnothing$;
(3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.

3.2.1. Mengenoperationen. Mengenoperationen erlauben aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden.

Vereinigung

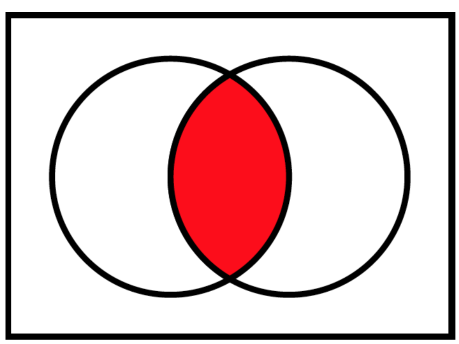
$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Hier "oder" ist nicht exklusiv, das heisst x kann auch in A und in B sein.



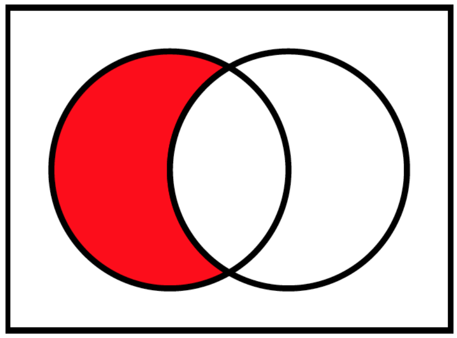
Durchschnitt oder Schnittmenge oder Schnitt

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$



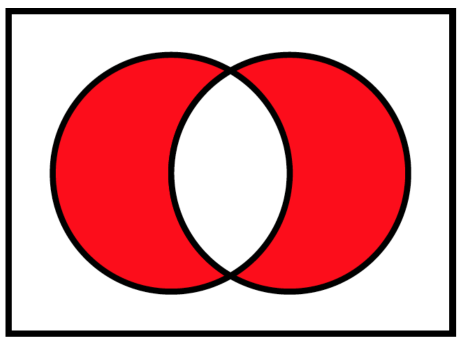
Differenzmenge

$$A \smallsetminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$



Symmetrische Differenzmenge

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$\{x : x \in A \text{ und } x \notin B\} \text{ oder } \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\}\,.$$



LEMMA 3.18. *Füe jede zwei Mengen A und B, gilt*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

PROOF. Wir müssen zwei Aussagen beweisen:

(1) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, und
(2) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(1) Wir nehmen an, dass $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit könner wir annehmen, dass $x \in A \setminus B$. (Falls $x \in B \setminus A$ ist der Beweis ähnlich.) Falls $x \in A \setminus B$, ist $x \in A$ und $x \notin B$ so, dass $x \in A \subset A \cup B$ und $x \notin A \cap B$. Das heisst $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(2) Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in A \cup B$ aber $x \notin A \cap B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x \in A$ und $x \notin B$ so, dass $x \in A \setminus B$ und dann $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. $\square$

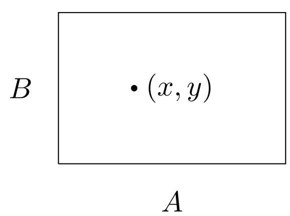
Komplement

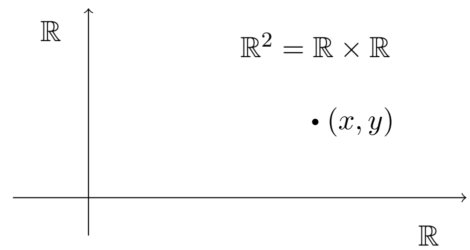
$$A^c := \{x : a \notin A\}$$

Falls $A \subset B$, ist $A^c = B \setminus A$ und das Komplement einer Menge hängt immer von der Menge, von der A eine Teilmenge ist.

Kartesisches Produkt

$$A \times B := \{(x,y) : x \in A \text{ und } y \in B\}$$





Beispiel 3.19.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n :=& \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n\} \\ =& \text{ die Menge der geordneten } n\text{-Tupel } (x_1, \ldots, x_n) \,. \end{aligned}$$

Vorsicht. Der Ausdruck (x,y) ist nicht gleich dem Ausdruck $\{x,y\}$!

$$(x,y) \text{ ist eine geordnetes Paar und } (x,y) \neq (y,x)$$

$$\{x,y\} \text{ ist die Menge mit zwei Elemente } x,y \text{ und } \{x,y\} = \{y,x\} \,.$$

Beispiel 3.20. (1) Die Lösung der Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ ist die Menge $\{2,3\}$.

(2) Die Lösung des Systems

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ist das geordnete Paar $(x,y) = (2,3)$.

Falls die Mengen A und B endlich sind, könner wir die Kardinalität des Kartesisches Produktes betrachten. Das ist

$$\#(A \times B) = \#A \,\#B \qquad \text{oder} \qquad |A \times B| = |A|\,|B| \,,$$

wobei $\#A$ und $|A|$ zwei Schreibweisen für die Anzahl der Elemente von A sind.

3.3. Summen und Produktzeichen

3.3.1. Summen. In Mathematik benutzen wir eine sehr praktische Schreibweise für die Summe von mehreren Summanden. Seien Objekte a_j (zum Beispiel Zahlen, Funktionen, Vektoren,...) für alle $j \in A \subseteq \mathbb{Z}$.

Beispiel 3.21. $a_j = j$ für $j \in \mathbb{Z}$.

Die Summe $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q$ kann mit dem Summenzeichen $\sum$ geschrieben werden,

$$\sum_{j=p}^{q} a_j := \begin{cases} 0 & q < p \\ a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q & q \geq p \,. \end{cases}$$

Hier ist j die *Summationsvariable* und p, q sind die *Summationsgrenzen*.

Beispiel 3.22. (1) $\sum_{i=0}^4 x_i = x_0 + x_2 + x_2 + x_3 + x_4$;
(2) $\sum_{n=2}^5 n^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$;
(3) $\sum_{j=1}^6 2^{(j-1)} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^6 2^{(i-1)} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \sum_{i=0}^5 2^i$.

Wir haben in $(*)$ benutzt, dass die Summe unabhängig von der Summationsvariable ist. Die Identität $\sum_{i=1}^6 2^{i-1} = \sum_{i=0}^5 2^i$ deuten auch an, dass wir erlaubt sind, eine Variabletransformation zu machen, ohne den Wert der Summe zu ändern. Betrachten wir die Summe

$$\sum_{k=p}^{q} a_k \,.$$

Falls wir $k = k' - r$ setzen, erhalten wir $k' = k + r$. Daraus folgt die folgende Transformation für die Summationsgrenzen

$$\begin{aligned} k = p &\Rightarrow k' = p + r \\ k = q &\Rightarrow k' = q + r \,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k'=p+r}^{q+r} a_{k'-r} = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r} \,. \tag{3.1}$$

Eigenschaften (Eigenschaften der Summe). (S0) *Die Summezeichen ist unabhängig von der Summationsvariable;*
(S1) $\sum_{k=p}^q (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=p}^q b_k$;
(S2) $\sum_{k=p}^q c a_k = c \sum_{k=p}^q a_k$ *für* $c \in \mathbb{R}$;

Vorsicht. $\sum_{k=p}^q a_k b_k \neq a_k \sum_{k=p}^q b_k$ und

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=p}^{q} a_k \right) \left(\sum_{k=p}^{q} b_k \right) \,.$$

(S3) $\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=n+1}^q n_a$, *falls* $p \leq n \leq q$;
(S4) $\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$ *oder (teleskopierende Summe oder Teleskopensumme);*
(S5) *Wie wir in* (3.1) *schon gesehen haben, gilt*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k'=p+r}^{q+r} a_{k'-r} = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r} \,.$$

Der Beweis der ersten drei Eigenschaften ist sehr leicht und man kann sich davon überzeugen.

Beweis von (S4).

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}+(-a_k)) \\
&\overset{(S1)}{=} \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} + \sum_{k=p}^{q}(-a_k) \\
&\overset{(S2)}{=} \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\
&\overset{k'=k+1}{=} \sum_{k'=p+1}^{q+1} a_{k'} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\
&= \sum_{k=p+1}^{q+1} a_k - \sum_{k=p}^{q} a_k \\
&\overset{(S3)}{=} a_{q+1}-a_p\,.
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 3.23. Wir möchten die Summe $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ berechnen. Bemerken wir, dass $2k-1=k^2-(k-1)^2$ so, dass

$$
\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-(k-1)^2)=n^2-(1-1)^2=n^2\,.
$$

In einer teleskopierenden Summe ist die Summe gleich dem Summand mit der grössten Summationavariable aus der grössten Summationsgrenze ausgewertet minus dem Summand mit der kleinsten Summationsvariable aus den kleinsten Summationsgrenze ausgewertet.

Beispiel 3.24. Wir möchten beweisen, dass für jedes $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$,

(1) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ und
(2) $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$.

PROOF. Aus $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 \\
&= \frac{1-x^{n+1}-(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{x-x^{n+1}}{1-x} \,.
\end{aligned}$$

Es ist deshalb genug die erste Identität (1) zu beweisen. Mithilfe der Eigenschaften der Summen erhalten wir

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k \\
&\overset{(S2)}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \\
&\overset{(S1)}{=} \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) \\
&\overset{(S2)}{=} - \sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k) \\
&\overset{(S4)}{=} - (x^{n+1} - x^0) \\
&= x^0 - x^{n+1} \,,
\end{aligned}$$

das heisst

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1} \,.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \,.$$

□

3.3.2. Produkten. Gleichermassen können wir das Produktzeichen definieren

$$\prod_{k=p}^{q} a_k := \begin{cases} 1 & q < p \\ a_p a_{p+1} \dots a_q & q \geq p \end{cases}$$

Eigenschaften (Eigenschaften des Produktes). (P1) $\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{j=p}^{q} a_j$;

(P2) $\prod_{k=p}^{q} a_k = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{q} a_k\right)$, *falls* $p \leq n \leq q$;

(P3) $\prod_{k=p}^{q} a_k b_k = \prod_{k=p}^{q} a_k \prod_{k=p}^{q} b_k$.

Beispiel 3.25. $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n =: n!$ (und $0! := 1$, $1! := 1$).

Vorsicht. $n!$ wächst sehr schnell (schneller als die Exponentialfunktion) und ist schwierig zu berechnen. Wir werden aber im Laufen des Kurses sehen, dass, falls n gross ist, $n!$ näherungsweise gleich $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ ist.

Mithilfe der Fakultät $n!$ werden die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gebildet.

Bemerkung 3.26. (1) $n!$ ist die Anzahl Arten, um n verschiedene Objekte von 1 bis n zu nummerieren.
(2) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Beispiel 3.27. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

(Mithilfe dieser Identität kann man die Tabelle der Binomialkoeffizienten – Pascalschen Dreieck – berechnen, das heisst $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.)

Proof. Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Wir haben in $(*)$ die zwei Brücke auf den selben Nenner gebracht. Das keinsten gemeinsame Vielfaches der Nenner ist in diesem Fall $k!(n-k+1)!$. $\square$

CHAPTER 4

Funktionen

4.1. Definitionen und Beispiele

DEFINITION 4.1. Eine *Funktion* oder eine *Abbildung* f besteht aus drei Daten:

(1) aus den *Definitionsbereich* $X = \mathrm{dom}(f)$;
(2) aus den *Zielbereich* $Y = \mathrm{range}(f)$;
(3) aus einer Zuordnungvorschrift, die zu jedem Element $x \in X$, genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Wir schreiben $y = f(x)$.

Normalerweise schreiben wir $f\colon X \to Y$ für eine Funktion und $x \mapsto f(x)$ für die Vorschrift, die zu $x \in X$ den Wert $f(x)$ zuordnet.

DEFINITION 4.2. Die Menge

$$\mathrm{image}(f) := \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : \exists\, x \in X \text{ mit } y = f(x)\} \subseteq Y$$

heisst die *Bildmenge* der Funktion $f\colon X \to Y$.

BEMERKUNG 4.3. Die Bildmenge ist nur eine Teilmenge der Zielmenge, nicht unbedingt gleich.

Zu jeder Funktion $f\colon X \to Y$ gehört ihr Graph.

DEFINITION 4.4. Der *Graph* einer Funktion $f\colon X \to Y$ ist die Menge

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y\,.$$

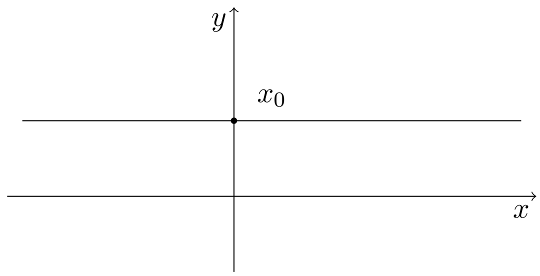
Vor wir viele Beispiele von Funktionen betrachten, geben wir die Definition eines Intervalls:

DEFINITION 4.5. Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $c, d \in \mathbb{R}$.

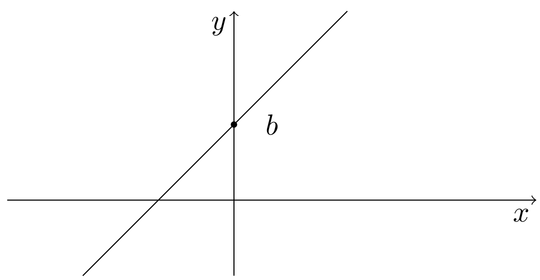
- Ein *offenes Intervall* ist ein Intervall $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- Ein *abgeschlossenes Intervall* ist ein Intervall $[c, d] := \{x \in \mathbb{R} : c \leq x \leq d\}$.

BEMERKUNG 4.6. Die Intervalle $[c, b) := \{x \in \mathbb{R} : c \leq x < b\}$ und $(a, d] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq d\}$ sind weder offen noch abgeschlossen. Sie sind aber Intervalle.

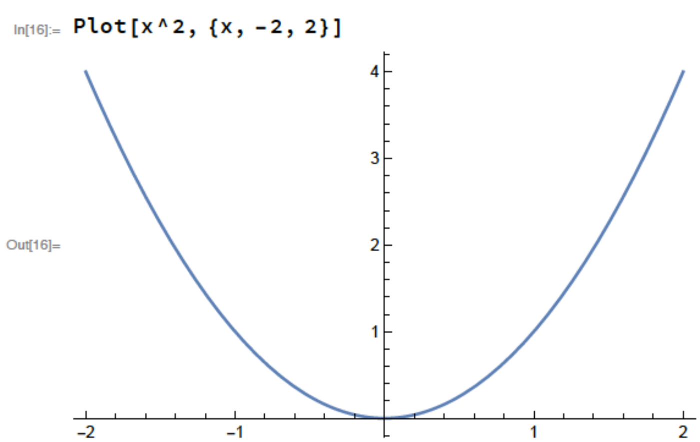
BEISPIEL 4.7. (1) Eine *konstante* Funktion ist eine Funktion, deren Bildmenge aus einem Punkt besteht. Falls $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $x \mapsto x_0$ definiert, ist $\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{range}(f_1) = \mathbb{R}$, $\mathrm{image}(f_1) = \{x_0\}$ und der Graph von f_1 ist



(2) Eine *lineare* Funktion ist eine Funktion, deren graph eine Gerade ist. Falls $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $x \mapsto ax + b$ definiert, ist $\operatorname{dom}(f_2) = \operatorname{range}(f_2) = \operatorname{image}(f_2) = \mathbb{R}$ und der Graph von f_2 ist



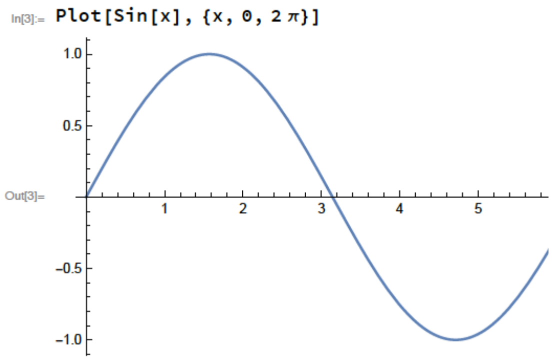
(3) Falls $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $x \mapsto x^2$ definiert, ist $\operatorname{dom}(f_3) = \operatorname{range}(f_3) = \mathbb{R}$, $\operatorname{image}(f_3) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$ und der Graph von f_3 ist

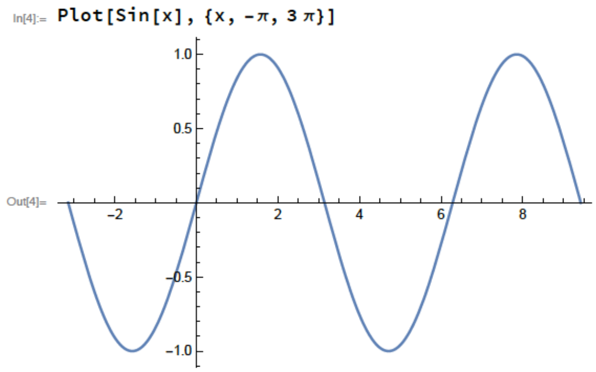


(4) Falls $f_4\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ist durch $x \mapsto x^2$ definiert, ist $\operatorname{dom}(f_4) = \mathbb{R}$, $\operatorname{range}(f_4) = \operatorname{image}(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$ und der Graph von f_4 ist gleich dem Graph von f_3. Laut der Definition sind aber die Funktionen f_3 und f_4 nicht gleich, weil $\operatorname{range}(f_3) \neq \operatorname{range}(f_4)$.

(5) Seien $f\colon [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ und $g\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ durch $x \mapsto f(x) := \sin x$ und $x \mapsto g(x) := \sin x$ definiert. In diesem Fall sind $\operatorname{image}(f) = \operatorname{image}(g) =$

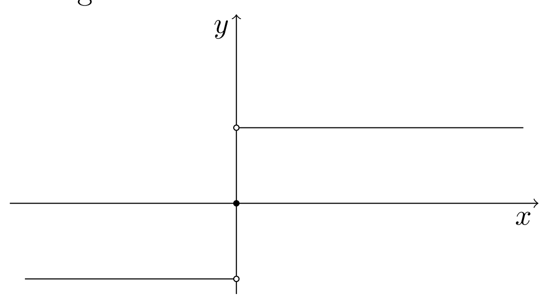
$[-1,1] = \mathrm{range}(f) = \mathrm{range}(g)$, aber $\mathrm{dom}(f) \neq \mathrm{dom}(g)$ und die Graphen sind deshalb auch nicht gleich.





(6) Die Vorzeichen – oder Signum – Funktion $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist so definiert

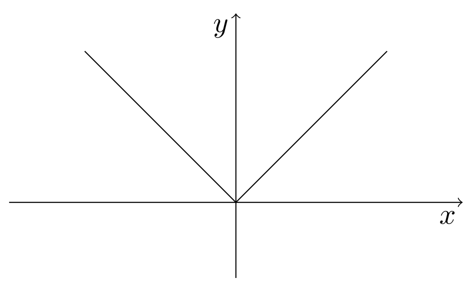
$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$



Dann ist $\mathrm{dom}(\mathrm{sgn}) = \mathrm{range}(\mathrm{sgn}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{image}(\mathrm{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$.

(7) Der *Absolutbetrag* $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



definiert.

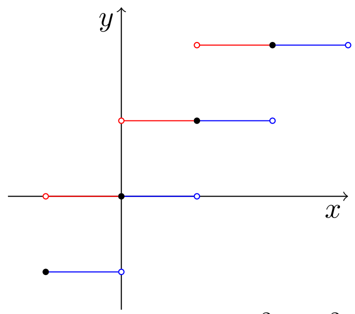
(8) Die *Abrundungsfunktion* $\lfloor \cdot \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und die *Aufrundungsfunktion* $\lceil \cdot \rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ sind beziehungsweise durch

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} :\ k \leq x\}$$

und

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} :\ k \geq x\}$$

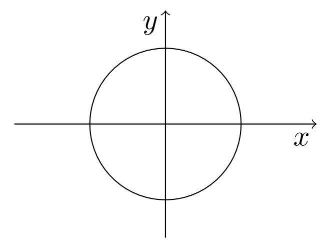
definiert.



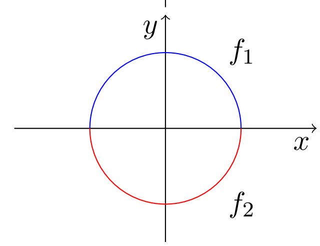
Es gilt $\lfloor k \rfloor \leq \lceil k \rceil$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
(Im Graph ist die Aufrundungsfunktion rot und die Abrundungsfunktion blau. Die schwarzen Punkte gehören zu beiden Graphen.)

(9) Die Menge $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ist ein Kreis dem Zentrum im Ursprung und dem Radius 1.

Der Kreis ist nicht der Graph einer Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, weil die Zuordnungvorschift $x \mapsto f(x)$ nicht eindeutig bestimmt ist.



Der Kreis definiert aber zwei Funktionen, $f_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_1(x) := \sqrt{1-x^2}$ und $f_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_2(x) := -\sqrt{1-x^2}$. Man sagt, dass die Funktionen f_1 und f_2 durch die implizite Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert sind.



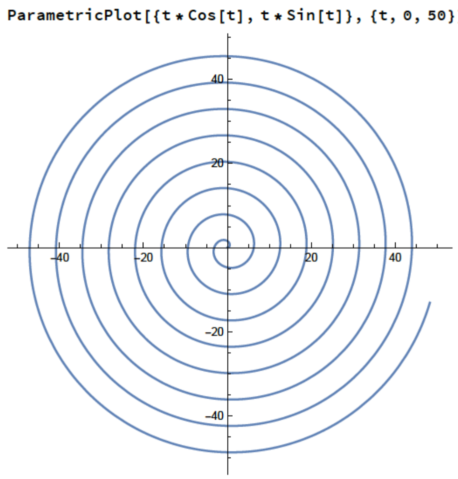
Bemerkung 4.8. Der Graph einer Funktion schneidet jede vertikale Gerade in höchsten einem Punkt.

Man kann auch Funktionen mit änderen Definitionsbereiche oder änderen Zielbereiche betrachten.

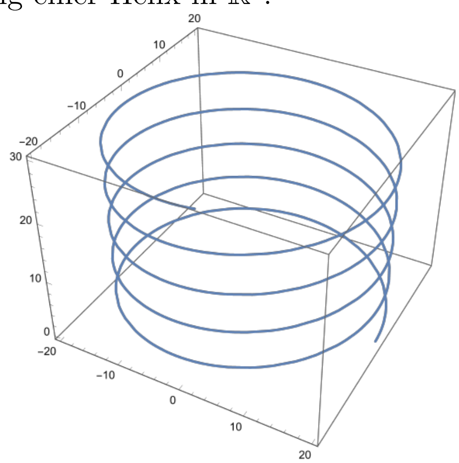
Beispiel 4.9. Falls der Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, heisst die Funktion eine *Folge*. In diesem Fall bezeichnen wir die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ u.s.w., das heisst falls $f\colon \mathbb{N} \to Y$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ definiert ist, benutzen wir die Schreibweise $f(n) := a_n$.

Beispiel 4.10. Wir werden später die folgenden Begriffe eingehender studieren. Hier möchten wir nur erwähnen, dass man Funktionen mit mehrdimensionalen Definitions– oder Zielbereiche betrachten kann.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$) ist eine vektorwertige Funktion, die eine Kurve in der Ebene (oder im dreidimensionalen Raum) beschreibt. Dieser Funktionen geben eine *Parameterdarstellung* ihren Graph.
   (a) Die Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$ ist eine Parameterdarstellung des Kreises dem Radius r und dem Zentrum im Ursprung.
   (b) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ durch $t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$ ist eine Parameterdarstellung einer Spirale in der xy-Ebene.

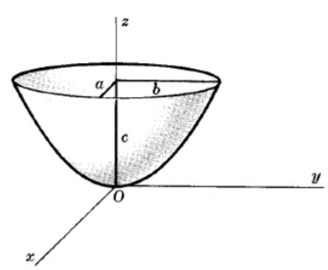


(c) Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ durch $t \mapsto (r\cos t, r\sin t, t)$ ist eine Parameterdarstellung einer Helix in $\mathbb{R}^3$.



(2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, deren Graph eine Fläche ist. Zum Beispiel ordnet man zu jedem Punkt auf der Landkarte seine Höhe über der Meer zu.

Beispiel 4.11. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ ist eine *elliptische Paraboloid.*



(3) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (zum Beispiel $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) ist ein *Vektorfeld*, und zu jedem Punkt in $\mathbb{R}^n$ ordnet einen Vektor in $\mathbb{R}^m$ zu. Beispiele sind die Stärke und Richtung einer Kraft, oder das magnetische Feld.

4.2. Eigenschaften von Funktionen

Definition 4.12. Die Funktion $f\colon X \to Y$ heisst *surjektiv*, falls $\mathrm{image}(f) = Y$, d.h. falls zu jedem $y \in Y$ gibt es $x \in X$ mit $f(x) = y$.

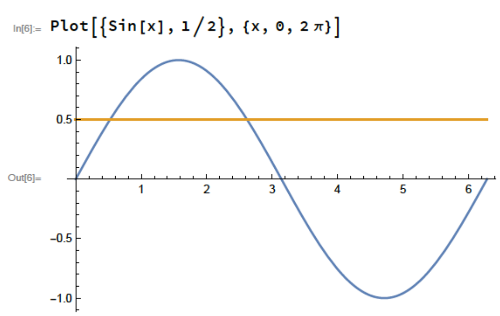
Bemerkung 4.13. Der Graph einer surjektiven Funktion $f\colon X \to Y$ schneidet jede horizontale Gerade $y = y_0$ für jedes $y_0 \in Y$ in mindesten einem Punkt.

Beispiel 4.14. Die Funktion $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^2$ in Beispiel 4.7(3) ist nicht surjektiv, weil für jedes $y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = y < 0$. Die Funktion $f_4\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_4(x) = x^2$ in Beispiel 4.7(4) ist surjektiv, weil für jedes $y \geq 0$ und $x = \sqrt{y}$ oder $x = -\sqrt{y}$, gilt $f(x) = y$.

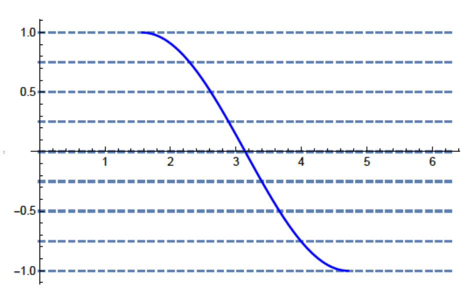
Definition 4.15. Die Funktion $f\colon X \to Y$ ist *injektiv*, falls für jedes $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Bemerkung 4.16. Der Graph einer injektiven Funktion erfüllt die Eigenschaft, dass für jede horizontale Gerade, die den Graph schneidet, die Schnittmenge genau gleich einem Punkt ist.

Beispiel 4.17. Die Funktion $\sin\colon [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ ist nicht injektiv, da zu jeder horizontalen Gerade $y = y_0$, $-1 \leq y_0 \leq 1$, gibt es zwei Lösungen der Gleichung $\sin x = y_0$.



Man kann aber den Definitionsbereich der Funktion sin beschänken, um eine injektive Funktion zu erhalten. In der Tat ist die Funktion $\sin\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ injektiv.

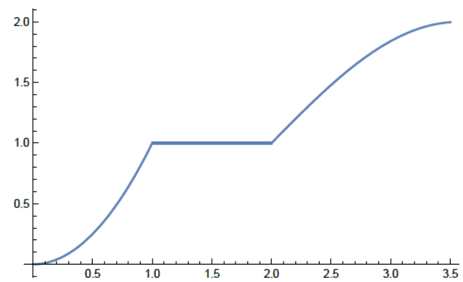


DEFINITION 4.18. Eine Funktion $f\colon X \to Y$, die injektiv und surjektiv ist, heisst *bijektiv*.

Ein wichtiger Begriff ist die *Monotonie* einer Funktion.

DEFINITION 4.19. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion.

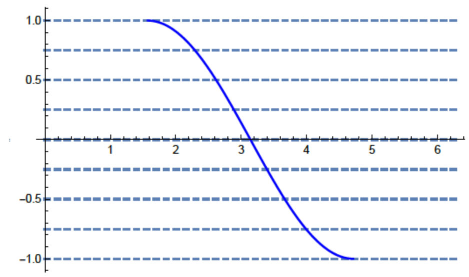
(1) Wir sagen, dass f *monoton wachsend* ist, falls $f(x) \leq f(y)$ für jedes $x, y \in X$ mit $x \leq y$;



(2) Wir sagen, dass f *monoton fallend* ist, falls $f(x) \geq f(y)$ für jedes $x, y \in X$ mit $x \leq y$.

BEISPIEL 4.20. Die konstante Funktion $f(x) \equiv k$ ist monotone wachsend und monoton fallend.

(3) Wir sagen, dass f *streng monoton wachsend* ist, falls $f(x) < f(y)$ für jedes $x, y \in X$ mit $x < y$;
(4) Wir sagen, dass f *streng monoton fallend* ist, falls $f(x) > f(y)$ für jedes $x, y \in X$ mit $x < y$.



BEISPIEL 4.21. Die konstante Funktion $f(x) \equiv k$ ist monotone wachsend und monoton fallend aber nicht streng.

Monotonie ist in Beziehung zur Inketivität wichtig. Wir haben:

LEMMA 4.22. *Falls die Funktion $f\colon X \to Y$ immer streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist, ist die Funktion injektive.*

Wegen der folgenden Definition sind injektive Funktionen wichtig:

DEFINITION 4.23. Sei $f\colon X \to Y$ eine injektive Funktion. Die *Umkehrfunktion* f^{-1} von f ist die Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\operatorname{dom}(f^{-1}) = \operatorname{image}(f)$ (und $= \operatorname{range}(f)$, falls f bijektiv ist);
(2) $\operatorname{range}(f^{-1}) = \operatorname{dom}(f)$;
(3) falls $y \in \operatorname{image}(f)$ und $x \in X$ ist so, dass $f(x) = y$, dann ist $f^{-1}(y) = x$.

Wir bemerken, dass es genau ein x mit der Eigenschaft $f(x) = y$ gibt, weil f injektiv angenommen wird.

Beispiel 4.24. Sei $f(x) := \frac{2x-1}{x+3}$. Um die inverse Abbildung (oder Umkehrfunktion) zu finden, probieren wir die Gleichung $y = \frac{2x-1}{x+3}$ zu lösen.

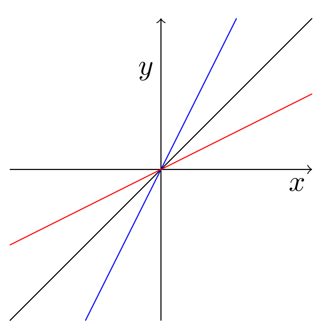
$$y = \frac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow y(x+3) = 2x-1 \Leftrightarrow x(y-2) = -1-3y \Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{2-y},$$

d.h $x = \frac{1+3y}{2-y}$ ist das einzige $x \in \operatorname{dom}(f)$ mit $f(x) = y$. Daraus folgt, dass

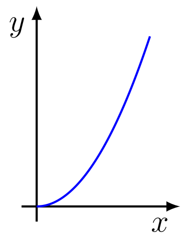
$$f^{-1}(y) := \frac{1+3y}{2-y}.$$

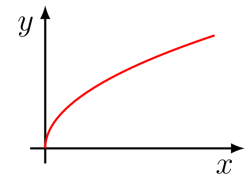
Der Graph der Umkehrfunktion kann aus den Graph der Funktion f erhalten werden. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann für jedes $x \in X$ gibt es ein eindeutiges $y \in Y$ mit $f(x) = y$. Falls f surjektive ist, gibt es für jedes $y \in Y$ ein (nicht unbedingt eindeutiges) $x \in X$ mit $f(x) = y$. Falls f bijektive ist, gibt es für jedes $y \in Y$ ein eindeutiges $x \in X$ mit $f(x) = y$ und $x = f^{-1}(y)$. Der Punkt $(x, f(x)) \in X \times Y$ gehört in der Tat zum Graph von f und $(x, f(x)) \in (\operatorname{dom}(f), \operatorname{image}(f)) = (\operatorname{image}(f^{-1}), \operatorname{dom}(f^{-1}))$. Daraus folgt, dass falls $(f^{-1}(y), y) = (x, f(x)) \in \operatorname{graph}(f)$, dann ist $(y, f^{-1}(y)) \in \operatorname{graph}(f^{-1})$.

Beispiel 4.25. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2x$ definiert. Dann ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

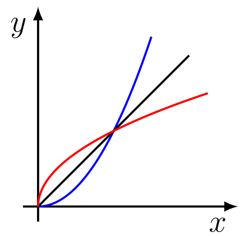


Beispiel 4.26. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv. Um die Umkehrfunktion zu betrachten, verkleinen wir den Definitionsbereich von f so, dass die Einschränkung von f injectiv wird. Wir benutzen die gleiche Schreibweise für die Funktion mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$. Da $\operatorname{image}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, ist f^{-1} auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ durch $f^{-1}(x) := \sqrt{x}$ definiert und $f^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.





Manchmal möchten wir beid Funktionen (die Funktion und die Umkehrfunktion) zusammen betrachten. In diesem Fall betrachten wir f als eine Funktion von x und f^{-1} als eine Funktion von y. Der Graph von f^{-1} wird deshalb die Spiegelung des Graphes von f an der Gerade $x = y$ sein.



Beispiel 4.27. Sei $n \geq 1$. Die Potenzfunktion $\mathrm{pot}_n \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$x \mapsto \mathrm{pot}_n(x) := x^n$$

ist streng monoton wachsend. In der Tat können wir schreiben

$$x^n - (x')^n = (x - x')(x^{n-1} + x^{n-2}x' + \cdots + x(x')^{n-2} + (x')^{n-1})\,.$$

Falls $0 \leq x' < x$, ist $x - x' > 0$ und

$$(x^{n-1} + x^{n-2}x' + \cdots + x(x')^{n-2} + (x')^{n-1}) > 0\,.$$

Daraus folgt, dass $x^n - (x')^n > 0$, d.h. $x^n - (x')^n \neq 0$.

Die Surjektivität wird später bewiesen.

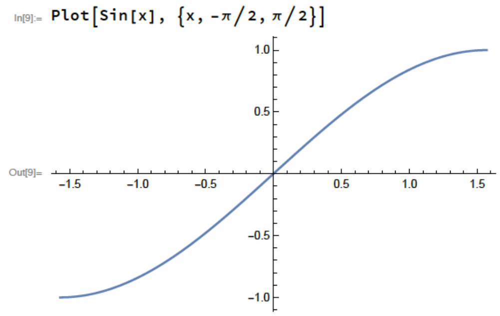
Wir können deshalb die n-te Wurzel definieren

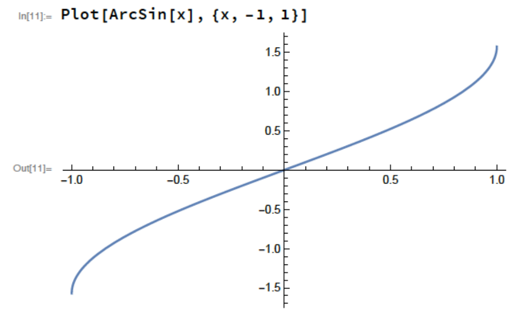
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{wrz}_n \colon \mathbb{R}_{\geq 0} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ y & \mapsto & x = y^{1/n}\,, \end{array}$$

wobei $x^n = y$.

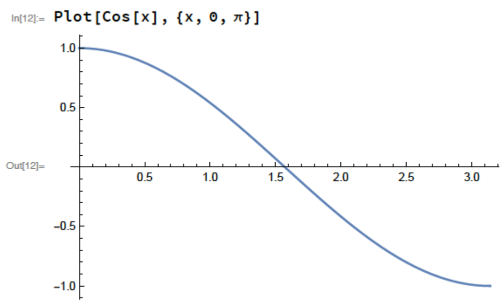
Beispiel 4.28. Um die inverse Abbildungen der trigonometrischen Funktionen zu definieren, müssen wir eine Einschränkung auf einer Teilmenge des Definitionsbereiches betrachten.

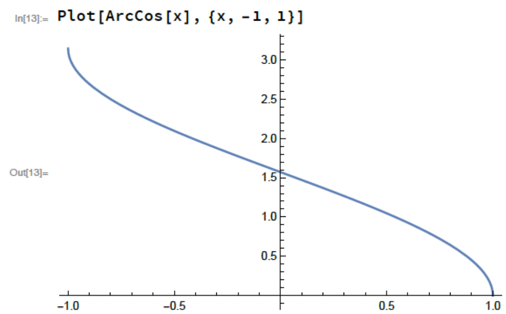
(1) Die Umkehrfunktion von $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ ist $\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



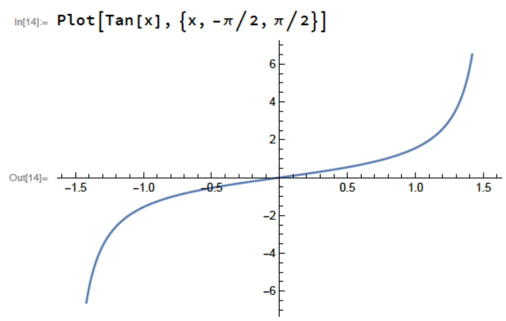


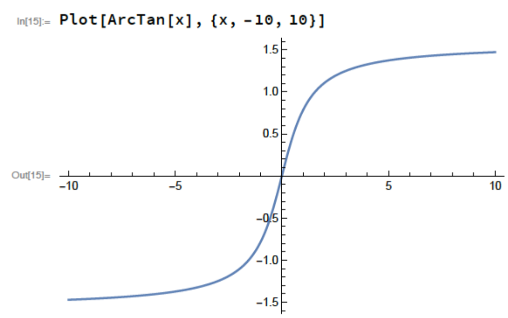
(2) Die Umkehrfunktion von $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ ist $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$





(3) Die Umkehrfunktion von $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.





Definition 4.29. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst:

(1) *gerade*, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$;
(2) *ungerade*, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

Ein Funktion ist:

(1) gerade genau dann, wenn ihr Graph spiegelsymmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
(2) ungerade genau dann, wenn ihr Graph spiegelsymmetrisch bezüglich des Ursprungs ist.

Beispiel 4.30. Die Funktionen 1, x^2, x^{2n}, $\cos x$, $|x|$ sind gerade. Die Funktionen x, x^3, x^{2n+1}, $\sin x$ sind ungerade.

Bemerkung 4.31. Jede Funktion lässt sich als die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion dargestellt werden.

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\,,$$

wobei $\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ gerade ist und $\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ ist ungerade. Diese Darstellung ist eindeutig.

4.2.1. Operationen mit Funktionen. Falls wir zwei oder mehrere Funktionen haben, können wir mithilfe von fundamentalen Operationen zusätzliche Funktionen erhalten.

Definition 4.32. Seien $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ und $h\colon Y \to Z$ drei Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $f+g\colon X \to Y$ ist durch $x \mapsto (f+g)(x) := f(x)+g(x)$ definiert;
(2) $\lambda f\colon X \to Y$ ist durch $x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ definiert;
(3) $f \cdot g\colon X \to Y$ ist durch $x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ definiert;
(4) $f/g\colon X \to Y$ ist durch $x \mapsto (f/g)(x) := f(x)/g(x)$ definiert, falls $g(x) \neq 0$ für jedes $x \in X$ ist.
(5) Die *Verkettung* von f mit h (oder die *zusammengesetzte Abbildung*) ist die Funktion $h \circ f\colon X \to Z$, die zu jedem $x \in X$ die Verkettung $h(f(x))$ zuordnet.

In (1) bis (4) ist es wichtig, dass die Definitionsbereiche beiden Funktionen übereinstimmen. Falls der Definitionsbereich einer Funktion eine Teilmenge des Definitionsbereiches der anderen ist, können wir als Definitionsbereich die Schnittmenge $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$ der Definitionsbereiche nehmen. Zum Beispiel ist

$$\operatorname{dom}(f/g) = \{x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) : \, g(x) \neq 0\}\,.$$

Bemerkung 4.33. Die Summe und das Produkt zwei Funktionen ist kommutativ, d.h.

$$f+g = g+f \qquad \text{und} \qquad f \cdot g = g \cdot f\,,$$

der Quotient und die Verkettung sind aber nicht.

Beispiel 4.34. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto f(x) := x^3$ und $x \mapsto g(x) := \cos x$ definiert.

(1) $\operatorname{dom}(f/g) = \{x \in \mathbb{R} : \, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ und $\operatorname{dom}(g/f) = \mathbb{R}$.
(2) $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $x \mapsto (\cos x)^3$ und $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $x \mapsto \cos x^3$. Dann ist zum Beispiel $(f \circ g)(\pi) = (\cos \pi)^3 = -1$ und $(g \circ f)(\pi) = \cos \pi^3 \sim \cos 31.00627668 \sim 0.91726$.
(3) Ein besseres Beispiel is mit der Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) := e^x$ (wir haben aber die Exponentialfunktion nicht definiert). Dann ist $h \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto e^{\cos x}$ definiert und $\operatorname{image}(h \circ g) = \left[\frac{1}{e}, e\right]$. Anderseits ist $g \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \cos e^x$ definiert und $\operatorname{image}(g \circ h) = [-1, 1]$.

Beispiel 4.35. Sei $f\colon X \to Y$ bijektive und sei $f^{-1}\colon Y \to X$ die Umkehrfunktion. Dann ist $f \circ f^{-1}\colon Y \to Y$ so, dass $f \circ f^{-1}(y) = y$. In der Tat, zu jedem $y \in Y$ ordnet f^{-1} das eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$ zu

$$y \xmapsto{f^{-1}} x \xmapsto{f} y\,.$$

Daraus folgt, dass $f \circ f^{-1} = Id_Y$. Gleichfalls ist $f^{-1} \circ f\colon X \to X$ so, dass $f^{-1} \circ f(x) = x$. In der Tat zu jedem $x \in X$ ordnet f den Wert $y = f(x)$ zu und $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$ ist das eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$. Daraus folgt, dass $x = f^{-1}(f(x))$ und $f^{-1} \circ f = Id_X$.

Die Abbildungen Id_X (bzw. Id_Y) heisst die *identische Abbildung* von X (bzw. Y).

4.2.2. Stetigkeit. Eine rationelle Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich als der Quotient von zwei ganzen Zahlen darstellen. Daraus folgt, dass die rationelle Zahlen genau manipuliert werden können.

Beispiel 4.36. Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$. Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ können wir $f(x)$ genau berechnen. Dasselbe kann nicht gesagt werden, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zum Beispiel $f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{16} = .5625$, aber $f(e) = 7.389056098930649...$ ist nur eine Approximation, die mithilfe von einer rationellen Approximation von e berechnet wird.

Die Eigenschaft, dass falls x eine Approximation von x_0 ist, die Werte $f(x)$ und $f(x_0)$ auch in der Nähe von einander sind, ist sehr wichtig. Diese Eigenschaft ist die so-genannte *Stetigkeit*. Wir möchten eigentlich, dass je kleiner der Fehler bei der Berechnung der Werte von f ist, desto weniger sollte die Approximation der Werte von x sein.

Definition 4.37. Die Funktion $f\colon X \to Y$ ist an der Stelle $x_0 \in X$ *stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass

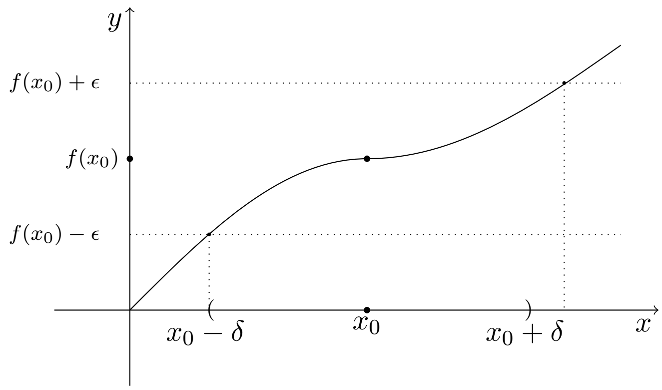
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

Bevor wir die Definition erklären, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \\ &\Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \end{aligned}$$

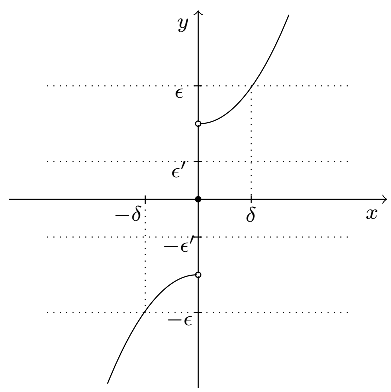
und gleichermassen

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon &\Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \\ &\Leftrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)\,. \end{aligned}$$



Wir betrachten den Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{graph}(f)$ und nehmen ein $\epsilon > 0$. Als nächstes betrachten wir das Intervall $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ auf der y-Achse um den Puntk x_0. Wir nehmen die Punknte um x_0 (das heisst in einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit Mittelpunkt x_0), zu denen die Funktion f einen Punkt in $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ zuordnet. Falls wir ein solches Intervall *für jedes* $\epsilon > 0$ finden können, ist die Funktion f an der Stelle x_0 stetig.

Beispiel 4.38. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)(x^2 + 1)$, die im Ursprung nicht stetig ist.



Falls $\epsilon > 1$ ist, gibt es $\delta > 0$ so, dass

$$|x| = |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x)| < \epsilon\,.$$

[Man kann $\delta = \sqrt{\epsilon - 1}$ nehmen. In der Tat gilt $|f(x)| < \epsilon$ für jedes $x \in (-\sqrt{\epsilon - 1}, \sqrt{\epsilon - 1})$.]

Aber falls $0 < \epsilon' < 1$ ist, gibt es kein $\delta > 0$ so, dass

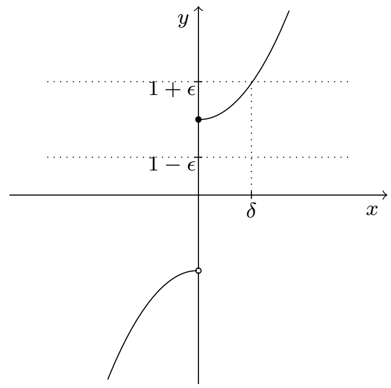
$$|x| = |x - 0| < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - f(0)| = |f(x)| < \epsilon'\,.$$

[Falls $\epsilon' < 1$ ist, ist $\delta = \sqrt{\epsilon' - 1}$) nicht definiert.] Das einzige δ, dass $(*)$ erfüllt ist $\delta = 0$: in der Tat $f(0) = 0 \in (-\epsilon', \epsilon')$ aber für jedes $x \neq 0$ ist $|f(x)| > 1$, d.h. $f(x) \neq (-\epsilon', \epsilon')$.

Beispiel 4.39. Wir betrachten jetzt die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} (x^2+1) & x \geq 0 \\ -(x^2+1) & x < 0\,. \end{cases}$$

Die Funktion f ist auch im Ursprung nicht stetig.



Falls $0 < \epsilon < 1$ ist (zum Beispiel $e = \frac{1}{2}$) gibt es kein $\delta > 0$ so, dass

$$|x| = |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x) - 1| < \epsilon\,.$$

In der Tat, gibt es $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$ falls $0 < x < \delta$, aber für alles $\delta > 0$ und jedes $-\delta < x < 0$ die Ungleichung $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$ gilt nicht.

Bemerkung 4.40.
(1) Die Aussage in der Definition muss für jedes $\epsilon > 0$ wahr sein. Das $\delta > 0$ hängt von ϵ ab, man kann aber ein kleineres δ wählen.
(2) Eine Funktion ist stetig, falls wir beim Zeichnen ihres Graphen den Bleistift vom Papier nicht heben müssen.

Man kann auch die Definition der Stetigkeit nur "einseitig" geben:

Definition 4.41. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$.
(1) Wir sagen, dass f an der Stelle x_0 *rechtsseitig stetig* ist, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass

$$\text{für jedes } x \in [x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)\,.$$

(2) Wir sagen, dass f an der Stelle x_0 *linkssseitig stetig* ist, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass

$$\text{für jedes } x \in (x_0 - \delta, x_0] \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)\,.$$

Beispiel 4.42. Die Funktion in Beispiel 4.39 ist rechtsseitig stetig.

Es ist klar, dass eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn sie an der Stelle x_0 rechtsseitig stetig und linksseitig stetig ist.

Definition 4.43. Eine Funktion heisst *stetig* (auf $\mathrm{dom}(f)$), wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ stetig ist.

EIGENSCHAFTEN (Eigenschaften der Stetigkeit).
(St1) *Konstante Funktionen sind stetig;*
(St2) *die identische Abbildung ist stetig;*
(St3) *das Produkt und die Summe von zwei stetigen Funktionen sind stetig;*
(St4) *der Quotient von zwei stetigen Funktionen ist stetig auf jedem Punkt, wo er definiert ist;*
(St5) *die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig;*
(St6) *die Verkettung von stetigen Funktionen ist stetig.*

BEISPIEL 4.44.
(1) $f(x) = c$ ist stetig;
(2) $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist stetig (wegen (St1), (St2) und (St3));
(3) eine rationelle Funktion $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ ist auf jedem Punkt x_0 mit $q_m(x_0) \neq 0$ stetig;

DEFINITION 4.45. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heisst *Lipschitz* (oder *Lipschitz stetig*) in $x_0 \in X$, falls es ein $C > 0$ und ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jedes $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$, die Aussage $|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$ gilt.

Eine Funktion ist Lipschitz stetig, falls die Approximationsrate durch eine lineare Funktion beschränkt ist. Falls $\delta > 0$ wirkt, wird auch jedes δ' mit $0 < \delta' < \delta$ wirken.

LEMMA 4.46. *Eine Lipschitz Funktion ist auch stetig*[1].

PROOF. Nehmen wir ein $\epsilon > 0$. Wegen der Lipschitzstetigkeit wissen wir, dass es ein $C > 0$ und ein $\delta' > 0$ gibt so, dass

$$\text{für jedes } x \in X \text{ mit } |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| < C\delta' \,. \tag{4.1}$$

Wir müssen $\delta > 0$ finden so, dass für jedes $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Falls $C\delta' < \epsilon$, können wir $\delta = \delta'$ nehmen.

Falls $C\delta' \geq \epsilon$ wählen wir ein $\delta > 0$ so, dass $C\delta < \epsilon$. Dann muss $\delta < \delta'$ sein. Daraus folgt, dass für jedes $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| < C\delta < \epsilon$. □

Die Umkehrung der Aussage in Lemma 4.46 gilt nicht.

BEISPIEL 4.47. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig im Ursprung aber nicht Lipschitz.

Um die Stetigkeit im Ursprung zu bewiesen, sei $\epsilon > 0$. Wir müssen $\delta > 0$ finden so, dass für jedes $x \in X$ mit $|x - 0| = x < \delta$, $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \epsilon$. Wir können deshalb $\delta = \epsilon^2$ wählen so, dass falls $x < \epsilon^2$, $\sqrt{x} < \epsilon$ gilt.

[1] Aus Wikipedia: Ein Hilfssatz oder Lemma (lat. lemma, gr. $\lambda\tilde{\eta}\mu\mu\alpha$, “Einnahme”, “Annahme”, Plural: “Lemmata”) ist eine mathematische oder logische Aussage, die im Beweis eines Satzes verwendet wird, der aber selbst nicht der Rang eines Satzes eingeräumt wird. Die Unterscheidung von Sätzen und Lemmata ist fliessend und nicht objektiv.

Um zu beweisen, dass f nicht Lipschitz ist, müssen wir beweisen, dass es kein $C > 0$ oder kein $\delta > 0$ gibt so, dass $|\sqrt{x}| \le C|x|$ für jedes $x \in X$ mit $x < \delta$. Aber

$$\begin{aligned}\sqrt{x} \le Cx &\Leftrightarrow x \le C^2x^2 \\ &\Leftrightarrow x(C^2x-1) \ge 0 \\ &\overset{x\in\mathbb{R}_{\ge 0}}{\Leftrightarrow} x \ge 0 \text{ und } C^2x - 1 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow x \ge 0 \text{ und } x \ge \frac{1}{C^2}\,.\end{aligned}$$

Deshalb können wir nicht herleiten, dass aus $x \in X$ mit $|x| < \delta$ folgt, dass $|\sqrt{x}| \le C|x|$.

4.2.3. Der Zwischenwertsatz.

Satz 4.48 (Zwischenwertsatz). *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und nehmen wir an, dass $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f wenigstens eine Nullstelle $x_0 \in (a,b)$.*

Intuitiv ist es klar, dass f eine Nullstelle in (a,b) besitzen muss: um den Graph von f von $(a, f(a))$ bit $(b, f(b))$ zu zeichnen, muss man unbedingt die x-Achse durchschneiden.

Proof. Wir definieren zwei Folgen $(a_n)_{n\ge0}$ und $(b_n)_{n\ge0}$. Setzen wir $a_0 = a$ und $b_0 = b$ und betrachten wir den Mittelpunkt $(a_0 + b_0)/2$. Falls $f((a_0 + b_0)/2) = 0$ haben wir die Nullstellen gefunden. Falls nicht, ist es entweder $f((a_0 + b_0)/2) > 0$ oder $f((a_0 + b_0)/2) < 0$. Wir betrachten jetzt das Intervall

$$\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right] \qquad \text{oder} \qquad \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$$

so, dass f an den Endpunkte die zwei Vorzeichen nimmt. Wir setzen a_1 gleich dem linken Grenze des gewählten Intervall und b_1 gleich dem rechten Grenze. Wir gehen dann weiter, d.h. falls wir ein Intervall $[a_k, b_k]$ gewählt haben, definieren wir

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & \text{falls} f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) > 0 \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \text{falls} f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Die zwei Folgen genügen die folgenden Eigenschaften:

(1) die Folge $(a_k)_{k\ge0}$ ist (nicht streng) monoton wachsend, die Folge $(b_k)_{k\ge0}$ ist (nicht streng) monotone fallend;
(2) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le b_n$ und
$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b_0\,;$$
(3) die Folgen $(a_k)_{k\ge0}$ und $(b_k)_{k\ge0}$ sind beschränkt.

Aus dem Satz 4.100 folgt, dass die zwei Folge einen Limes besitzen. Wir behaupten, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ist eine Nullstelle x_0. In der Tat, wäre x_0 keine Nullstell, könnten wir zum Beispiel $f(x_0) > 0$ annehmen. Da f stetig ist, für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes x mit $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Nehmen wir $\epsilon = f(x_0)/2$. Dann für jedes x mit $|x - x_0| < \delta$, gilt

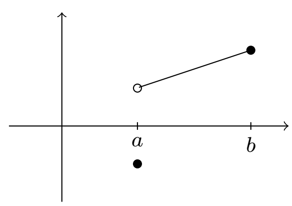
$$-\epsilon + f(x_0) < f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

oder

$$0 < -\epsilon + 2\epsilon < f(x) < 2\epsilon + \epsilon$$

Aber das ist ein Wiederspruch, weil aus $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgt, dass es a_n gibt, die die Ungleichheit $0 < |a_n - x_0| < \delta$ erfüllt und $f(a_n) < 0$. □

Bemerkung 4.49. (1) Die Stetigkeit der Funktion f auf dem Intervall (a, b) ist nicht genug.

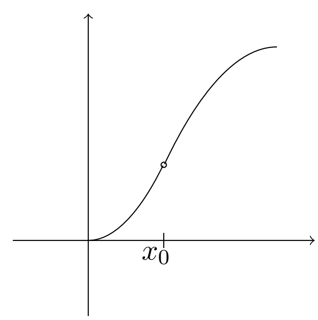


(2) Es könnte sein, dass f mehr als eine Nullstelle besitzt. Wir werden mit dieser Methode nur eine Nullstelle finden.

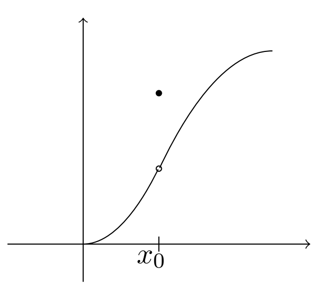
4.3. Grenzwerte

Der Begriff von Stetigkeit ist mit dem Begriff von Grenzwert strikt verbunden. Es gibt verschiedene Arten von Unstetigkeiten an einer Stelle x_0.

(1) Die Funktion ist in x_0 nicht definiert.

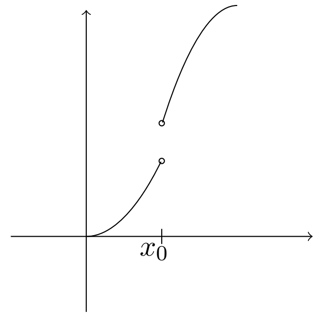


(2)



Die Funktion ist in x_0 definiert aber sowieso nicht stetig, d.h. man muss "den Bleistift von Papier heben, um den Graph zu zeichnen".

(3) Die zwei Teilen des Graphes von f links und rechts von x_0 sind nicht in der Nähe von einander.



Um dies präzis zu machen, leiten wir den Begriff von Grenzwert ein. Wir müssen zuerst ein Paar Definitionan geben.

Definition 4.50. (1) Die Punkte a, b sind *Randpunkte* des Intervalls (a, b) (sie sind nicht unbedingt im Intervall enthalten).
(2) Jeder Punkt $x \in I$ in einem Intervall I mit der Eigenschaft, dass es ein Intervall mit Zentrum in x gibt, das noch ganz in A erhalten ist, heisst *innerer Punkt*.

Bemerkung 4.51. (1) Ein Intervall ist offen, falls es nur innere Punkte enthält.
(2) Ein Intervall is abgeschlossen, falls es seine Randpunkte enthält.

Dieser Begriff wird auch in mehreren Dimensionen verallgemeinert sein (in Analysis II).

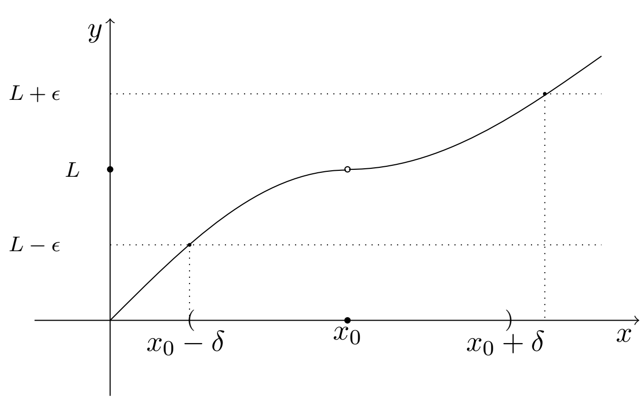
Definition 4.52. Sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ und sei f eine Funktion auf $I \setminus \{x_0\}$ definiert. Wir sagen, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,,$$

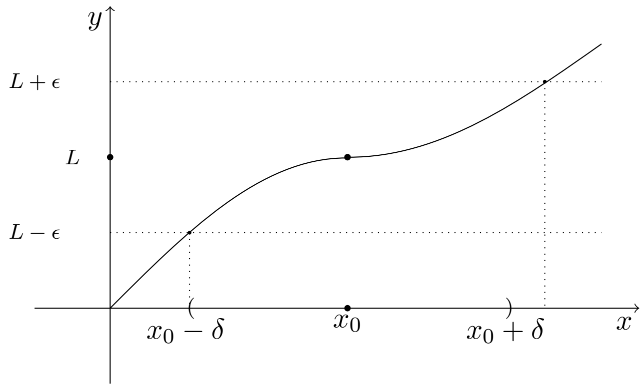
falls für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Wir merken die äquivalenten Aussagen

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \text{ für } x \neq x_0$$
$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon\,.$$



BEMERKUNG 4.53. Des Limes $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ist unabhängig von der Definition von f and der Stelle x_0. Man kann zum Beispiel haben, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ obwohl $f(x_0) \neq L$.



Der Grund ist, dass das Limes nur das verhalten der Funktion f in der Nähe von x_0 und nicht in Punkt x_0 verschreibt.

Wir können jetzt die Definition von Stetigkeit und den Begriff von Grenzwert so verbinden.

LEMMA 4.54. *Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn*

(1) *f ist and der Stelle x_0 definiert;*
(2) *$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, und*
(3) *$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

BEISPIEL 4.55. Wir betrachten die Funktion
$$f(x) := \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$
und wir möchten $\lim_{x\to 2} f(x)$ bestimmen.

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert, da sie dort die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Falls $x \neq 2$ und $x \neq -2$ ist
$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{x-3}{x+2} =: g(x)\,.$$
Die Funktion g ist an der Stelle $x = 2$ stetig und deshalb
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = -\frac{1}{4}\,.$$

4.3.1. Einseitige Grenzwerte. Man kann auch die *einseitige Grenzwerte* betrachten.

DEFINITION 4.56. Sei $x_0 \in I$ ein Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ (nicht unbedingt ein innerer Punkt) und sei f eine Funktion auf $I \setminus \{x_0\}$ definiert. Wir sagen, dass
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,,$$

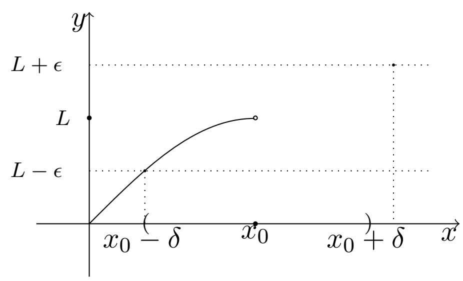
falls für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

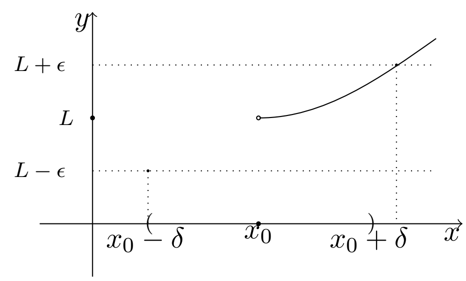
Wir betrachten nur die Werte von x an der rechte Seite von x_0 und wir bekommen der rechtseitigen Grenzwert von f an der Stelle x_0. Analog können wir auch den linkseitigen Grenzwert definieren.

Definition 4.57. Sei $x_0 \in I$ ein Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ (nicht unbedingt ein innerer Punkt) und sei f eine Funktion auf $I \setminus \{x_0\}$ definiert. Wir sagen, dass

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L\,,$$

falls für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.





Lemma 4.58. *Eine Funktion f ist an der Stelle x_0*

(1) rechtseitig stetig, *falls*
  (a) *f ist and der Stelle x_0 definiert;*
  (b) $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *existiert, und*
  (c) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
(2) linksseitig stetig, *falls*
  (a) *f ist and der Stelle x_0 definiert;*
  (b) $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existiert, und*
  (c) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Bemerkung 4.59. (1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.
(2) f ist an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn f and der Stelle x_0 rechtsseitig stetig und linksseitig stetig ist.

Die Bedingung

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

entählt zwei verschiedene Aussagen:

(i) Die Limes $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ undlim$_{x \to x_0^+} f(x)$ existieren, und
(ii) sie sind gleich $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$.

Nehmen wir an, dass die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist. Falls f and der Stelle x_0 nur die Bedingung (i) erfüllt, besitzt f an der Stelle x_0 eine *Sprungstelle*. Sprungstellen sind *unhebbare Unstetigkeiten*. Falls (ii) auch erfüllt ist, ist die Unstetigkeit an der Stelle x_0 *hebbare*.

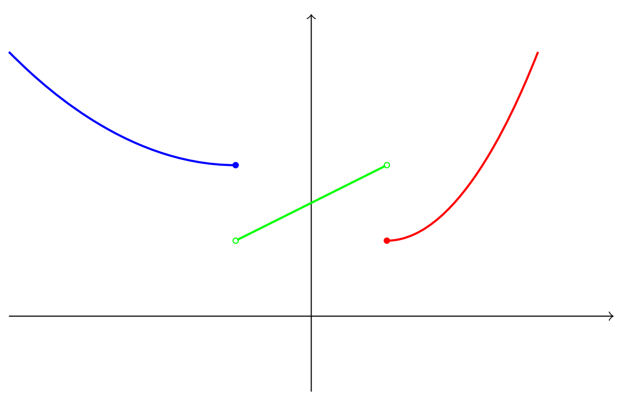
Beispiel 4.60. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & x \leq -1 \\ (\alpha+\beta)x & -1 < x < 1 \\ x^2 + \alpha x - \beta & x \geq 1\,. \end{cases}$$

definiert. Für welche α und β ist die Funktion f stetig? Die Funktionen $x^2 - \alpha x + \beta$, $(\alpha+\beta)x$ und $x^2 + \alpha x - \beta$ sind auf dem Definitionsbereich stetig. Daraus folgt, dass die Funktion f stetig ist genau dann, wenn

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \overset{(*)}{=} f(-1) \overset{!}{=} \lim_{x \to -1^+} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) \overset{!}{=} f(1) \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1^+} f(x)\,.$$

Die Gleicheit $(*)$ (bzw. $(**)$) folgt aus der Stetigkeit der Funktion $x^2 - \alpha x + \beta$ (bzw. $x^2 + \alpha x - \beta$) an der Stelle $x = -1$ (bzw. $x = 1$). Die anderen beiden Gleichheiten sind die Bedingungen, die wir auferlegen müssen.



Wir müssen α und β finden so, dass auf $x = -1$ und $x = 1$ die Werte übereinstimmen.

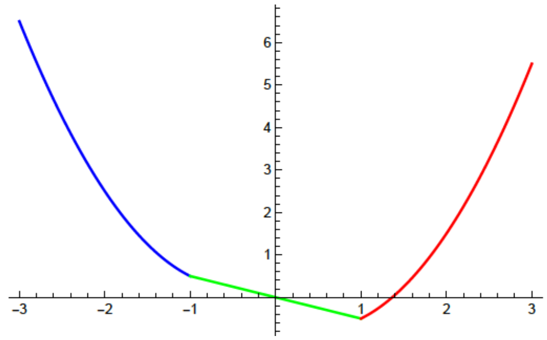
$$\begin{cases} f(-1) = (-1)^2 - \alpha(-1) + \beta \overset{!}{=} (\alpha+\beta)(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = (\alpha+\beta)(1) \overset{!}{=} (1)^2 + \alpha(1) - \beta = f(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta = -(\alpha+\beta) \\ \alpha + \beta = 1 + \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha + \beta = -\alpha - \beta \\ \beta = 1 - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)\,.$$

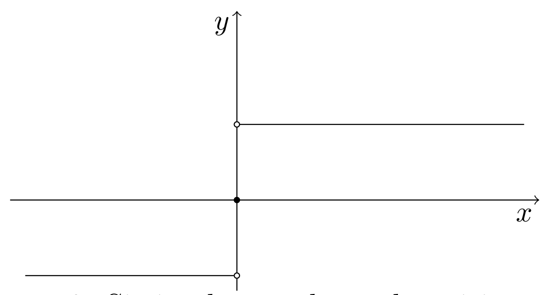
Mit diesen Werten von α und β ist der Graph der Funktion



Beispiel 4.61. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ in Beispiel 4.55 hat an der Stelle $x = 2$ eine hebbare Unstetigkeit. Man kann die Funktion an der Stelle x_0 so definieren, dass die neue Funktion stetig ist.

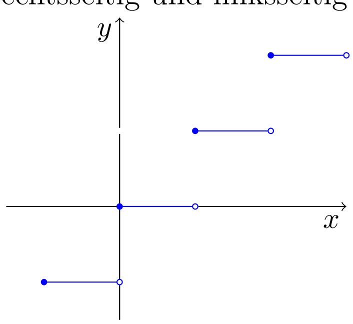
Beispiel 4.62. Die Funktion sgn

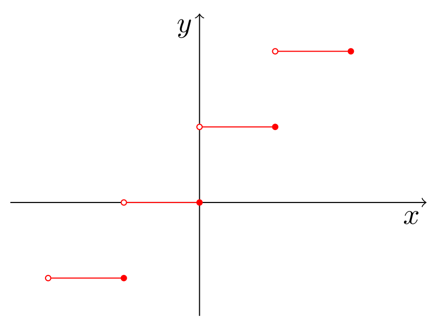
$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$



hat eine unhebbare Unstetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Sie ist dort weder rechtsseitig noch linksseitig stetig.

Beispiel 4.63. Die Abrundungsfunktion und die Aufrundungsfunktion in Beispiel 4.7(8) sind bzw. rechtsseitig und linksseitig stetig.





4.3.2. Grenzwerten im Unendlichen. Manchmal möchten wir das Verhalten einer Funktion für grosse Werte von x untersuchen. Wir fangen mit der folgenden Definition an:

Definition 4.64.

(1) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst *nach oben beschränkt* (bzw. *nach unten beschränkt*), falls es ein $N \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $x < N$ (bzw. $N < x$) für jedes $x \in X$.

(2) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst *beschränkt*, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

(3) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst *nach oben unbeschränkt* (bzw. *nach unten unbeschränkt*), falls es kein $N \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $x < N$ (bzw. $N < x$) für jedes $x \in X$.
(4) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst *unbeschränkt*, falls sie nach oben und nach unten unbeschränkt ist.

Beispiel 4.65. (1) Die Intervalle $(-\infty, b)$ und $(-\infty, b]$ sind nach unten unbeschränkt und nach oben beschränkt.
(2) Die Intervalle (a, ∞) und $[a, \infty)$ sind nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.
(3) Die Intervalle (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ und $[a, b]$ sind beschränkt.
(4) Das Intervall $(-\infty, \infty)$ ist unbeschränkt.

Definition 4.66. (1) Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion auf einem nach oben unbeschränkt Menge X definiert. Wir sagen, dass f für $x \to \infty$ den Grenzwert $\eta \in \mathbb{R}$ nimmt, und wir schreiben

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \eta\,,$$

falls für jedes $\epsilon > 0$ ein M gibt so, dass für jedes $x \in X$ mit $x > M \Rightarrow |f(x) - \eta| < \epsilon$.
(2) Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion auf einem nach unten unbeschränkt Menge X definiert. Wir sagen, dass f für $x \to -\infty$ den Grenzwert $\eta \in \mathbb{R}$ nimmt, und wir schreiben

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta\,,$$

falls für jedes $\epsilon > 0$ ein M gibt so, dass für jedes $x \in X$ mit $x < M \Rightarrow |f(x) - \eta| < \epsilon$.

Beispiel 4.67. Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$. Wir möchten beweisen, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Anders gesagt, möchten wir beweisen, dass für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $M > 0$ so, dass für jedes $x \in X$ mit $x > M \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \epsilon$. Es gilt

$$\frac{1}{x} < \epsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon}$$

und wir können deshalb $M = \frac{1}{\epsilon}$ nehmen.

Beispiel 4.68. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0\,,$$

weil für jedes $\epsilon > 0$ können wir $M = \frac{1}{\epsilon}$ nehmen so, dass

$$\text{für jedes } x \in X \text{ mit } x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\cos x}{x} < \frac{1}{x} < \epsilon\,.$$

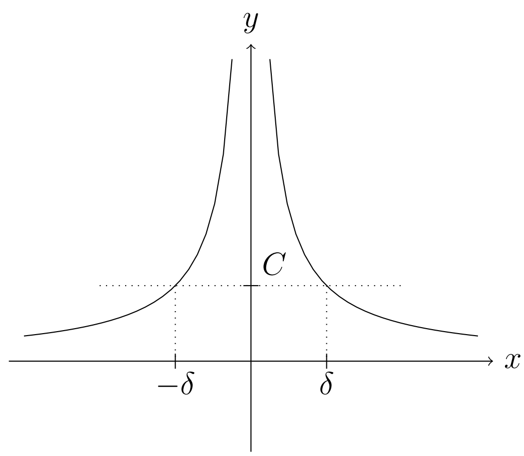
4.3.3. Unendliche Grenzwerte. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{|x|}$ wächst in der Nähe vom Ursprung über all Schranken hinaus. Wir sagen darum, dass $f(x)$ der unendlichen Grenzwert für $x \to 0$ hat.

DEFINITION 4.69. Sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ und sei f eine Funktion auf $I \smallsetminus \{x_0\}$ definiert. Wir sagen, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty\,,$$

falls für jedes $C > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes x mit $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > C$.

BEISPIEL 4.70. Sei $f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x^2$. Dann ist $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.



In der Tat, sei $C > 0$. Wir möchten beweisen, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jedes x mit $0 < |x| < \delta \Rightarrow 1/x^2 > C$. Wir können $\delta = \frac{1}{\sqrt{C}}$ nehmen so, dass

$$\text{falls } 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{C}} \Rightarrow 1/|x| > \sqrt{C} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > C\,.$$

Wir müssen auch Funktionen betrachten, die unter alle Schranken hinab fällt.

DEFINITION 4.71. Sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ und sei f eine Funktion auf $I \smallsetminus \{x_0\}$ definiert. Wir sagen, dass

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty\,,$$

falls für jedes $C > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes x mit $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -C$.

Man kann natürlich auch die unendliche einseitige Grenzwerte definieren.

DEFINITION 4.72. Sei $x_0 \in I$ ein (nicht unbedingt innerer) Punkt von $I \subseteq \mathbb{R}$ und sei f eine Funktion auf $I \smallsetminus \{x_0\}$ definiert.

(1) Wir sagen, dass

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$

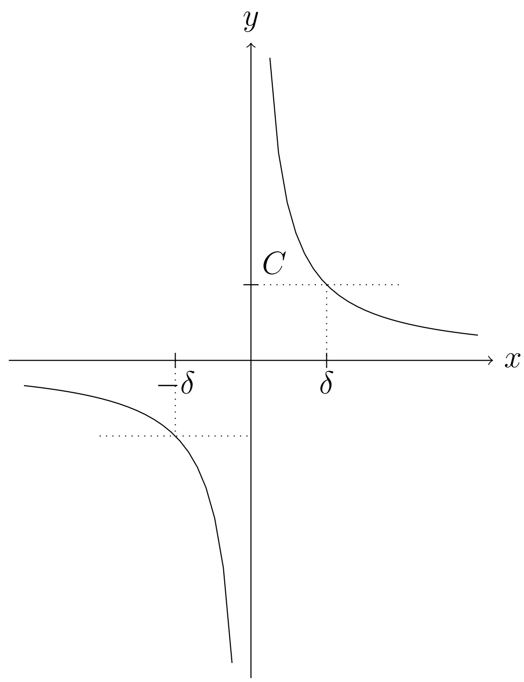
(bzw. $-\infty$), falls für jedes $C > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes x mit $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > C$ (bzw. $f(x) < -C$).

(2) Wir sagen, dass

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$$

(bzw. $-\infty$), falls für jedes $C > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes x mit $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > C$ (bzw. $f(x) < -C$).

Beispiel 4.73. Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$. Dann ist $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.



4.3.4. Operationen mit Grenzwerten. Wir haben schon gesehen, dass man neue Funktionen mithilfe von einigen Operationen mit Funktionen erhalten kann. Das Ergebnis dieser Operationen mit stetigen Funktionen noch stetig ist. Das Verhalten von den Grenzwerten ist ähnlich.

Eigenschaften (Eigenschaften der Grenzwerten). *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, und sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(L0) *Der Grenzwert ist eindeutig: falls es ein α' gibt so, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha'$, ist $\alpha = \alpha'$.*

(L1) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$;

(L2) $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \alpha\cdot\beta$. *Insbesondere, falls* $g(x)\equiv\beta$, *ist* $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\beta = \alpha\cdot\beta$;

(L3) $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, *falls* $\beta\neq 0$;

(L4) *Nehmen wir an, dass wir die Verkettung* $h\circ f$ *betrachten können und dass die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \ \textit{und} \ \lim_{x\to x_0} h(x)$$

existieren. Nehmen wir an, dass h *and der Stelle* α *stetig ist. Dann ist*

$$\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x\to x_0} f(x)) = h(\alpha)\,. \tag{4.2}$$

Beispiel 4.74. (1) Sei $p_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ein Polynom, $p_n(x) := a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Dann ist $\lim_{x\to x_0} p_n(x) = p_n(x_0)$ (da p_n stetig ist).

(2) $\lim_{x\to x_0} \frac{p_n(x)}{q_m(x))} = \frac{p_n(x_0)}{q_m(x_0)}$, wobei p_n und q_m Polynom sind mit $q_m(x_0)\neq 0$.

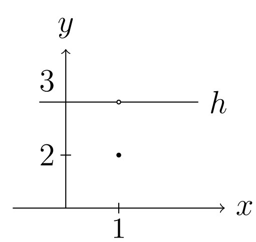
(3) Seien $f(x) := 1-x^2$ und $h(x) := \sqrt{x}$. Dann ist

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1-x^2)} = \sqrt{1}\,,$$

weil h an der Stelle $x=0$ stetig ist.

(4) Seien $f(x)\equiv 1$ und

$$h(x) = \begin{cases} 2 & x = 1\\ 3 & x\neq 1\,. \end{cases}$$



In diesem Fall ist $h(f(x))\equiv 2$ für jedes x, obwohl $\lim_{y\to y_0} h(y) = 3$ für jedes y_0. Insbesondere gilt $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = 3$ für jedes x_0 so, dass

$$3 = \lim_{x\to x_0} h(f(x)) \neq h(\lim_{x\to x_0} f(x)) = h(1) = 2\,.$$

Das ist nicht im Wiederspruch mit (4.2), weil h and der Stelle $f(x_0) = 1$ nicht stetig ist.

Um die Eigenschaften der Grenzwerten anzuwenden, müssen die Grenzwerte existieren (und endlich sein). Man kann aber auch ein Bisschen mit unendlichen Grenzwerten berechnen. Wir können die folgende Regeln für $\alpha\in\mathbb{R}$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\alpha\pm\infty &= \pm\infty\\
\infty+\infty &= \infty\\
\alpha\cdot\infty &= \infty\,,\ \text{falls } \alpha > 0\\
\alpha\cdot\infty &= -\infty\,,\ \text{falls } \alpha < 0\\
\infty\cdot\infty &= \infty\\
\frac{\alpha}{\infty} &= \frac{\alpha}{-\infty} = 0\,.
\end{aligned}$$

Vorsicht. Die Ausdrücken $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0/0$ und ∞/∞ sind all unbestimmt und sie können jeden Wert annehmen.

Das folgende Prinzip ist oft nützlich, um die Grenzwerte zu berechnen.

Lemma 4.75 (Vergleichskriterium I für Grenzwerte). *Seien f, g, h Funktionen, die die Ungleichkeit*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

für jedes x in einer Umgebung $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ des Punktes x_0 erfüllen. Nehmen wir an, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \alpha \,.$$

Dann ist $\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$.

Proof. Seien

$$G(x) := g(x) - f(x)$$

und

$$H(x) := h(x) - f(x)$$

so, dass

$$0 \leq G(x) \leq H(x) \,.$$

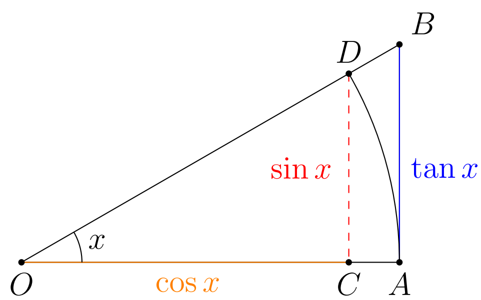
Da $\lim_{x\to x_0} H(x) = 0$, ist es genug zu beweisen, dass $\lim_{x\to x_0} G(x) = 0$.

Da $\lim_{x\to x_0} H(x) = 0$, für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow H(x) < \epsilon$. Aber $0 \leq G(x) \leq H(x)$ so, dass für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow G(x) \leq H(x) < \epsilon$, d.h. $\lim_{x\to x_0} G(x) = 0$. $\square$

Beispiel 4.76. Wir möchten beweisen, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \,.$$

Wir betrachten den Sektor der Winkel x vom Kreis der Radius 1.



Aus der folgende Ungleichungen von der Flächen

$$\mathrm{Fl}(OCD) \leq \mathrm{Fl}(OAD) \leq \mathrm{Fl}(OAB)$$

folgt, für $0 < x < \pi/e$, dass

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}\frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{2}\cos x\,,$$

oder

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x\,.$$

Aus $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$ folgt, dass $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$ und deshalb $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

LEMMA 4.77 (Vergleichskriterium II für Grenzwerte). *Seien f, g Funktionen, die für jedes x in einer Umgebung $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ des Punktes x_0 (oder für jedes x gross "genug") die Ungleichkeit $f(x)\leq g(x)$ erfüllen. Falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, gilt auch $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.*

Der Beweis ist sehr ähnlich des Beweises des ersten Vergleichskriteriums.

BEISPIEL 4.78. Da $\cos x \leq 1$, ist

$$\frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}\,.$$

Daraus und aus das Vergleichskriterium II folgt, dass

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x} \leq \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty\,.$$

BEISPIEL 4.79. Da

$$\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} \geq \frac{x}{3}$$

und $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3} = \infty$, ist auch

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} = \infty\,.$$

4.3.5. Asymptoten. Mithilfe den Grenzwerten können wir den Graph einer Funktion untersuchen.

DEFINITION 4.80. Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ und sei f eine Funktion at $I\setminus\{x_0\}$ definiert. Falls $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)\in\{\infty,-\infty\}$, heisst die Gerade $x = x_0$ eine *senkrechte Asymptote*.

BEISPIEL 4.81. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ hat die Gerade $x = -2$ als eine senkrechte Asymptote. In der Tat ist $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

Definition 4.82. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$, mit $X \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt (bzw. nach unten unbeschränkt) Falls $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0$ (bzw. $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0$), heisst die Gerade $y = mx + b$ eine *Asymptote* von f als $x \to \infty$ (bzw. als $x \to -\infty$).

Beispiel 4.83. Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x + \frac{1}{x}$ definiert. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - x)$$

so, dass $y = x$ eine Asymptote von f als $x \to \infty$ und als $x \to -\infty$ ist.

Um eine Asymptote zu bestimmen, können wir die zwei Parameter, m und b, so bestimmen:

(1) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$;
(2) $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$).

und gleichermassen als $x \to -\infty$.

Beispiel 4.84. Sei $f(x) := \frac{x^2-x-5}{x-3}$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-5}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-5-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{x-3} = 2\,.$$

In der Tat gilt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-5}{x-3} - (x+2)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-5-(x^2-x-6)}{x-3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-3} = 0\,.$$

Man könnte auch die Polynomdivision führen: aus

$$\frac{x^2-x-5}{x-3} = x + 2 + \frac{1}{x-3} \text{ und } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

folgt, dass $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (x+2)) = 0$

Beispiel 4.85. Die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x}$ hat keine Asymptote, da $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ aber $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$.

Definition 4.86. Zwei Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, wobei $X \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt, sind zueinander *asymptotisch*, falls $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$.

Zum Beispiel sind die zwei Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \sqrt{x+1}$ zueinander asymptotisch.

4.3.6. Vollstandige Induktion. Für die ganze Zahlen gilt die *vollstandige Induktion* (oder einfach die *Induktion*), ewlche wir ohne weitere Begründung akzeptieren.

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und sei $P(n)$ eine Aussageform. Wenn $P(n_0)$ wahr ist und es für alle $n \geq n_0$ zutrifft, dass $P(n+1)$ aus $P(n)$ folgt, so ist $P(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq n_0$.

Um das Induktionsprinzip zu benutzen, müssen wir zwei Schritte nehmen.

(i) Verifizieren, dass $P(n_0)$ zutrifft (*Verankerung*);
(ii) Verifizieren, dass die Aussage $P(n+1)$ aus $P(n)$ für $n \geq n_0$ folgt (*Induktionsschnitt*).

Beispiel 4.87. Beweisen, dass für jeden $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,. \tag{P(n)}$$

(i) *Verankerung* (P(1)): $1^1 = \frac{1}{6} 1 \cdot (2) \cdot 3$.

(ii) *Induktionsschnitt* (P(n)⇒P(n+1)): Wir nehmen an, dass für eine bestimmtes n die Induktionsvoraussetzung $P(n)$ wahr ist. Wir haben $P(n+1)$ zu zeigen. Da

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

gilt, folgt P(n+1) durch Addition von $(n+1)^2$ zu beiden Seiten:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + n + 1\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.88. Sei $0 < x_k < 1$ für $1 \leq k \leq n$ und $n \geq 2$. Beweise, dass

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \tag{P(n)}$$

Diese Formel hat die folgende Interpretation. Seien x_k, für $k = 1, \dots, n$ Rabatte, die im Anteil gegeben sind so, dass $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k)$ der Anteil den endgültige Kosten ist, falls wir die Rabatte hintereinander abziehen und $1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$ der Anteil en endgültige Kosten ist, falls wir die Rabatte addieren. Laut dieser Formel, ist es besser mehrere Rabatte zu addieren, als die Rabatte hintereinander abzuziehen.

(i) *Verankerung* (P(1)): $1 - x_1 \geq 1 - x_1$.

(ii) *Induktionsschnitt* (P(n)⇒P(n+1)): Nehmen wir an, dass für jedes $n \geq 2$

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und zeigen wir, dass

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \,.$$

Durch multiplizieren mal $(1 - x_{n+1})$ zu beiden Seiten die Aussage P(n+1) folgt:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k)(1 - x_{n+1}) \\
&\geq \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1 - x_{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k x_{n+1} \\
&\geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \,.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.89. Wir möchten den binomischer Lehrsatz

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

beweisen. In diesem Beispiel werden wir die vollstandige Induktion benutzen, um zu beweisen, dass die Anzahl $T(n, k)$ der (verschiedenen) k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, $0 \leq k \leq n$ gleich dem Binomialkoeffizient ist, d.h.

$$T(n, k) = \binom{n}{k} \,. \tag{P(n)}$$

(i) *Verankerung* (P(1)): $P(0) = 1 = \binom{0}{0}$

(ii) *Induktionsschnitt* (P(n)⇒P(n+1)): Wir haben eine $(n+1)$-elementige Menge $\{1,\dots,n+1\}$. Um eine k-elementige Teilmenge zu betrachten, können wir entweder

(1) eine k-elementige Teilmenge der Menge $\{1,\dots,n\}$ nehmen, oder
(2) eine $(k-1)$-elementige Teilmenge der Menge $\{1,\dots,n\}$ und das Element $(n+1)$ nehmen.

Aus dieser Bemerkung folgt, dass

$$T(n+1,k) = T(n,k) + T(n,k-1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Jetzt betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned} M &= \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \\ &= \underbrace{1}_{M_0(x_1,\dots,x_n)} + \underbrace{(x_1+\dots+x_n)}_{M_1(x_1,\dots,x_n)} + \underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n)}_{M_2(x_1,\dots,x_n)} \\ &\qquad + \underbrace{(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)}_{M_3(x_1,\dots,x_n)} \\ &\qquad + \dots + \underbrace{x_1x_2\dots x_n}_{M_n(x_1,\dots,x_n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_j(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

wobei $M_j(x_1,\dots,x_n)$ gleich der Summe aller möglichen Produkte von j Elementen in $\{x_1,\dots,x_n\}$ ist.

Wir haben schon bewiesen, dass die Anzahl alle möglichen Produkte von j Elementen in $\{x_1,\dots,x_n\}$ gleich $\binom{n}{k}$ ist. Daraus folgt, dass falls $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, dann ist

$$M_j(x,\dots,x) = \binom{n}{j}x^j$$

und deshalb

$$(1+x)^n = \prod_{k=1}^{n}(1+x) = \sum_{k=1}^{n} M_j(x,\dots,x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

4.4. Das Maximum (bzw. das Minimum) vs. das Supremum (bzw. das Infimum)

Definition 4.90. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere Teilmenge. Dann ist

$$\max X := \{M \in X : x \le M \text{ für jedes } x \in X\}$$
$$\min X := \{m \in X : m \le x \text{ für jedes } x \in X\}$$

Beispiel 4.91. (1) Für das Intervall $X = [0,1]$ gilt $\max X = 1$ und $\min X = 0$.

(2) Das Intervall $X = [0, 1)$ besitzt kein maximales Element.
(3) Das Intervall $X = [0, \infty)$ besitzt kein maximales Element und $\min X = 0$.
(4) Eine endliche Menge besitzt immer ein maximales Element $\max X$ und ein minimales Element $\min X$.

DEFINITION 4.92. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(1) Eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ mit $x \leq S$ für jedes $x \in X$ heisst eine *obere Schranke von* X.
(2) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $s \leq x$ für jedes $x \in X$ heisst eine *untere Schranke von* X.

SATZ 4.93. *Sei X eine nicht leere Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$.*

(1) *Falls X nach oben beschränkte ist, besitzt X eine eindeutige kleinste obere Schranke, genannt das* Supremum *von X und* $\sup X$.
(2) *Falls X nach unten beschränkte ist, besitzt X eine eindeutige grösste untere Schranke, genannt das* Infimum *von X und* $\inf X$.

BEISPIEL 4.94. (1) $0 = \inf[0, 1] = \inf(0, 1] = \inf[0, 1) = \inf(0, 1) = \min[0, 1] = \min[0, 1)$;
(2) $1 = \sup[0, 1] = \sup(0, 1] = \sup[0, 1) = \sup(0, 1) = \max[0, 1] = \max(0, 1]$.

BEMERKUNG 4.95. (1) Falls $\sup X \in X$ ist $\sup X = \max X$. Gleichermassen ist $\inf X = \min X$, falls $\inf X \in X$.
(2) Die Zahlen $\sup X$ und $\inf X$ existieren immer, aber es ist nicht unbedingt so für $\min X$ und $\max X$.

BEISPIEL 4.96. Sei $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Dann ist $\sup X = 1 = \max X$ und $\inf X = 0$. Das Minimum $\min X$ existiert nicht.

EIGENSCHAFTEN (Eigenschaften des sup und inf). *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen. Falls $c \in \mathbb{R}$ setzen wir*

$$\begin{aligned} cX :=& \{cx : x \in X\} \\ X + Y :=& \{x + y : x \in X \text{ und } y \in Y\} \end{aligned}$$

Dann gilt:

(1) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ *und* $\inf(X \cup Y) = \min\{\inf X, \inf Y\}$;
(2) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ *und* $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$;
(3)

$$\sup(cX) = \begin{cases} c \sup C & \text{falls } C > 0 \\ c \inf C & \text{falls } C < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \inf(cX) = \begin{cases} c \inf C & \text{falls } C > 0 \\ c \sup C & \text{falls } C < 0 \end{cases}$$

4.5. Folgen und Reihen

4.5.1. Folgen.

DEFINITION 4.97. Eine Abbildung $\mathbb{N} \to X \subset \mathbb{R}$, deren Definitionsbereich die Menge der naturlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ ist, heisst eine (*unendliche*) *Folge* in $X \subset \mathbb{R}$.

Wir benutzen die Schreibweise $(x_k)_{k\geq 0}$ oder $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$.

DEFINITION 4.98. Eine Folge $(x_k)_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}$ heisst *konvergent* mit Grenzwert x, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt so, dass für alle $n \geq N \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$.

BEMERKUNG 4.99. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. In der Tat, sei $x < y$ zwei Grenzwerte. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N > 0$ so, dass für jedes $n \geq N$, $|x_n - x| < \epsilon$ und $|x_n - y| < \epsilon$. Nehmen wir $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} = \frac{y-x}{2}$. Dann gibt es ein $N > 0$ so, dass für $n \geq N$

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon \qquad \text{und} \qquad y - \epsilon < x_n < y + \epsilon\,.$$

Aber

$$x + \epsilon = x + \frac{y-x}{2} = \frac{y+x}{2} = \frac{x+y}{2} = y - \frac{y-x}{2} = y - \epsilon$$

und x_n kann nicht gleichzeitig $< x + \epsilon$ und $> y - \epsilon$ sein

$$x_n < x + \epsilon = y - \epsilon < x_n\,.$$

Alle Regeln für die Grenzwerte kann man auch für die Folgen anwenden.

SATZ 4.100. *Eine streng monoton wachsende (oder fallende) beschränkte Folge* $(x_k)_{k\geq 0}$ *ist konvergent.*

PROOF. Sei

$$\begin{aligned} x &= \sup\{x_k : k \geq 0\} \\ &= \text{kleinste obere Schranke von } \{x_k : k \geq 0\} \\ &= \text{kleinste } y \text{ so, dass } x_k \leq y \text{ für jedes } k \geq 0 \end{aligned}$$

Dann ist $x_k \leq x$. Für jedes $\epsilon > 0$, ist $x - \epsilon$ keine obere Schranke (weil x die kleinste ober Schranke ist), deshalb gibt es ein N mit $x_N > x - \epsilon$. so, dass für jedes $k \geq N$, $x_k \geq x_N > x - \epsilon$. Daraus folgt, dass für jedes $k \geq N$

$$x - \epsilon < x_k \leq x < x + \epsilon$$

und dann $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. □

BEMERKUNG 4.101. Wir sagen manchmal, dass eine Folge besitzt eine Eigenschaft "für fast alle" n. Das bedeutet, dass es ein N gibt so, dass die Folge die Eigenschaft für alle $n \geq N$ besitzt. Anders gesagt, gilt die Eigenschaft für $(a_n)_{n\geq 0}$ bis auf endliche viele n.

SATZ 4.102 (Vergleichskriterium für Folgen). *Seien* $(x_n)_{n\geq 0}$ *und* $(y_n)_{n\geq 0}$ *zwei konvergenten Folgen.*

(1) *Fast* $x_n \leq y_n$ *für fast alle* n, *gilt*

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = y\,.$$

(2) *Sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$. *Ist* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *für fast alle* n, *so ist auch* $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$.

Definition 4.103. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ divergiert gegen ∞ (bzw. $-\infty$), und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

(bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$), wenn für jede $K \in \mathbb{R}$ gilt, dass $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) für jede $k \in \mathbb{R}$ gibt es ein N so, dass für fast alle n.

Beispiel 4.104. Wir betrachten die Folge, die durch $x_0 = c > 0$ und die Rekursivgleichung

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) \quad \text{für } n \geq 0$$

definiert ist. Wir möchten zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{c}$.

Wir merken, dass $x_{n+1} \geq 0$ für $n \geq 0$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{c} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) - \sqrt{c} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + c - 2\sqrt{c}x_n) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{c})^2 \\ &\geq 0\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} - \sqrt{c} &\overset{(4.3)}{=} \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{c})(x_n - \sqrt{c}) \\ &\leq \frac{1}{2x_n} x_n(x_n - \sqrt{c}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{c}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

und

$$0 \overset{(4.3)}{\leq} x_{n+1} - \sqrt{c} \overset{(4.4)}{\leq} \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{c}) \overset{(4.4)}{\leq} \frac{1}{2^2}(x_{n-1} - \sqrt{c}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n+1}}(x_0 - \sqrt{c}) = \frac{c - \sqrt{c}}{2^{n+1}}\,.$$

Da $\frac{c-\sqrt{c}}{2^{n+1}} \to 0$ als $n \to \infty$, ist die Behauptung mithilfe des ersten Vergleichskriteriums bewiesen.

4.5.2. Reihen. Aus einer Folge $a_k)_{k\geq 0}$ kann man eine unendliche Reihe definieren.

Definition 4.105. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

heisst eine (*unendliche*) *Reihe*, deren *Partialsumme* ist

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

definiert.

Die Reihe heisst *konvergent*, falls die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ der Partialsummen konvergent ist. In diesem Fall bezeichnet man den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right).$$

Beispiel 4.106. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{für } q < 1, \tag{4.5}$$

heisst die *geometrische Reihe*.

Um die Gleichzeit in (4.5) zu bewiesen, betrachten wir die Partialsumme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Wir haben schon in Beispiel refex:geometrische bewiesen, dass

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Da $q < 1$ ist, strebt q^{n+1} nach 0. Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Lemma 4.107. *Falls die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent ist, ist* $\lim_{k\to 0} a_k = 0$.

Proof. Wir schreiben

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1}.$$

Falls die Reihe konvergent ist, ist $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ und deshalb ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

□

Die Umkehrung dieses Faktes ist nicht wahr, als das folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 4.108. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,.$$
In diesem Fall strebt $1/k$ nach 0 als $k \to \infty$, die harmonische Reihe ist aber nicht konvergent. In der Tat ist
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$
Wäre die harmonische Reihe konvergent, würde
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$
sein. Das ist aber nicht möglich, da
$$0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) \geq \frac{1}{2}\,.$$
Beispiel 4.109. Die *alternierende harmonische Reihe* ist die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$
und sie ist konvergent. In der Tat gilt für die alternierende Reihe der folgenden Satz:

Satz 4.110. *Sei $(x_k)_{k\geq 0}$ eine Folge mit der folgenden Eigenschaften:*

(1) *$(x_k)_{k\geq 0}$ ist monotone fallend, und*
(2) *$\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.*

Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k$.

Mit $S := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k$ gilt für jedes $n \geq 1$
$$0 \leq |S - s_n| < x_{n+1}\,, \tag{4.6}$$
d.h. der Fehler ist höchsten so gross wie der erste Term in der Reihe, den wir weglassen.

Proof. Einerseits ist die Folge s_{2n} monoton wachsend, da
$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^{k-1}x_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k-1}x_k \\ &= (-1)^{2n+2-1}x_{2n+2} + (-1)^{2n+1-1}x_{2n+1} \\ &= -x_{2n+2} + x_{2n+1} \overset{(1)}{>} 0\,. \end{aligned}$$
Anderseits ist die Folge s_{2n+1} monoton fallend, da
$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = x_{2n+1} - x_{2n} \overset{(1)}{<} 0\,.$$

Es gibt auch

$$s_{2n} < s_{2n-1}\,,$$

weil

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -x_{2n} < 0\,.$$

Daraus folgt, dass

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n-2} < s_{2n} < s_{2n-1} < s_{2n-3} < \ldots s_3 < s_1\,.$$

Die Folgen $(s_{2n})_{n\geq 0}$ und $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ sind deshalb beschränkt and so konvergent (Satz 4.100). Seien

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} =: S' \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} =: S''\,.$$

Wir werden sehen, dass $S' = S''$. In der Tat ist

$$S' - S'' = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}(-x_{2n}) = 0\,.$$

Um (4.6) zu beweisen, bemerken wir, dass

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1\,. \tag{4.7}$$

Falls wir die erste, dritte und vierte Termen der Ungleichung (4.7) betrachten,

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1\,.$$

und s_{2n} subtrahieren, erhalten wir

$$0 < S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}\,. \tag{4.8}$$

Falls wir die erste, dritte und fünfte Termen von (4.7) betrachten,

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq S \leq s_{2n+1} < s_{2n-1} \quad \text{für jedes } n \geq 1\,,$$

und s_{2n-1} subtrahieren, erhalten wir

$$s_{2n} - s_{2n-1} \leq S - s_{2n-1} \leq 0\,,$$

oder, äquivalent,

$$0 \leq (-1)^{2n-1}(S - s_{2n-1}) \leq (-1)^{2n-1}(s_{2n} - s_{2n-1}) = x_{2n}\,. \tag{4.9}$$

Aus (4.8) und (4.9) folgt

$$0 \leq (-1)^n (S - s_n) \leq x_{n+1}\,.$$

$\square$

4.5.3. Vergleichkriterien für Reihen mit nicht negativen Glieder.

Satz 4.111 (Vergleichskriterium I für Reihen). *Seien $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für $n \geq 0$ für jedes $n \geq 0$. Falls es ein $C > 0$ gibt so, dass $a_n \leq Cb_n$ für jedes $n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. (Äquivalent: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent ist, ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht konvergent.)*

Wir bemerken, dass, damit der Satz wahr ist, genügt es, dass $a_n \leq Cb_n$ für jedes $n \geq n_0$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ ist.

Proof. Nehmen wir an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent ist so, dass $s_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ nach oben beschränkt ist. Daraus folgt, dass $t_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ auch nach oben beschänkt ist. Da t_n monoton wachsend ist, ist t_n konvergent, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. □

Anwendung. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für jedes $n \geq 0$. Nehmen wir an, dass es $C \geq 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ und $0 < q < 1$ mit $a_n \leq Cq^n$ für jedes $n \geq n_0$ gibt. Daraus folt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist.

Beispiel 4.112. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(\pi/4)}{2}\right)^k$ ist konvergent, da

$$\left(\frac{\cos(\pi/4)}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Satz 4.113 (Vergleichskriterium II für Reihen). *Seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für jedes $n \geq 0$ und nehmen wir an, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Proof. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \geq N$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} .$$

Daraus folgt, dass $a_n < \frac{3}{2} b_n$ und $b_n < 2a_n$. Wir können deshalb das erste Vergleichskriterium für Reihen, Satz 4.113, zweimal anwenden. □

Beispiel 4.114. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ ist konvergent: in der Tat ist sie eine Teleskopenreihe

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

so, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und so

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1\,.$$

Beispiel 4.115. Wir möchten die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ untersuchen. Da

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}\,,$$

können wir aber das erste Vergleichskriterium nicht anwenden. Mithilfe von zweiten Vergleichskriterium und Beispiel 4.115 können wir herleiten, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}^2$ konvergent ist, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1\,.$$

Desweiteren ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \geq 2$ auch konvergent, da

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Wir haben gesehen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \begin{cases} \text{divergiert} & \alpha \leq 1 \\ \text{konvergiert} & \alpha \geq 2\,. \end{cases}$$

Wir werden später sehen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ auch für $\alpha > 1$ konvergent ist.

Anwendung. Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für jedes $k \geq 0$. Nehmen wir an, dass es $C > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

$$a_k \leq \frac{C}{k^{1+\delta}} \qquad \text{für jedes } k \geq k_0$$

gibt. Daraus folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist. [Um diese Behauptung zu machen, haben wir angenommen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ auch für $\alpha > 1$ konvergent ist.]

4.5.4. Quotienten- und Wurzelkriterien.

Satz 4.116 (Quotientenkriterium). *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für jedes $n \geq 0$ und nehmen wir an, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\,.$$

(1) *Falls $L > 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent;*
(2) *falls $L < 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent;*
(3) *falls $L = 1$, ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unbestimmt.*

PROOF. Nehmen wir an, dass $L < 1$ und sei $q \in \mathbb{R}$ mit $L < q < 1$. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{ für jedes } n \geq N_0 \\
\Rightarrow &a_{n+1} < qa_n \text{ für jedes } n \geq N_0 \\
\Rightarrow &\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} < \frac{a_n}{q^n} \text{ für jedes } n \geq N_0 \\
\Rightarrow &\left(\frac{a_n}{q^n}\right) \text{ monoton fallend für jedes } n \geq N_0\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{a_n}{q^n} < \frac{a_{N_0}}{q^{N_0}} \text{ für jedes } n \geq N_0 \Rightarrow a_n \leq \frac{a_{N_0}}{q^{N_0}} q^n = Cq^n\,,$$

wobei $C = \frac{a_{N_0}}{q^{N_0}}$. Aus der Anwendung des ersten Vergleichskriterium für Reihen an der Seite 57 folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty}$ konvergent ist.

Falls $L > 1$, ist $a_{n+1} \geq a_n$ für jedes $n \geq N$ und deshalb a_n nicht gegen 0 streben kann. □

BEISPIEL 4.117. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is konvergent, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

SATZ 4.118 (Wurzelkriterium). *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für jedes $n \geq 0$ und nehmen wir an, dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = R\,.$$

(1) *Falls $R > 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent;*
(2) *falls $R < 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent;*
(3) *falls $R = 1$, ist das Behalten der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ unbestimmt.*

BEISPIEL 4.119. Die reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ ist konvergent, da

$$\left(\frac{1}{(\log n)^n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\log n} \to 0 \qquad \text{als } n \to \infty\,.$$

4.5.5. Absolut Konvergenz.

DEFINITION 4.120. (1) Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
(2) Eine Reihe, die konvergent aber nicht absolut konvergent ist, heisst *bedingt konvergent*.

BEISPIEL 4.121. Die alternierende Harmonische Reihe ist bedingt konvergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ist absolute konvergent.

Satz 4.122. *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch konvergent. Anders gesagt,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent } .$$

Wir werden den Satz ein bisschen später beweisen, wir müssen zuerst die folgenden Eigenschaften herstellen:

Eigenschaften (Eigenschaften der Reihen). *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei beliebige Reihen.*

(R1) *Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 0$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent genau dann, wenn $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ konvergent ist.*

(R2) $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n$ *für jedes $c \in \mathbb{R}$.*

(R3) (a) *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) .$$

(b) *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist divergent, ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergent.*

(c) *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent sind, kann man daraus nichts über die konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ herleiten.*

(R4) *Falls $a_n \leq b_n$ für jedes n, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} n_n$.*

(R5) *Man kann eine absolut konvergente mehrfache Reihe beliebig umordnen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n} a_{\ell,n-\ell} .$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_\ell \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .\end{aligned}$$

Beweis vom Satz 4.122. Setzen wir $b_n = a_n + |a_n|$. Da $a_n = b_n - |a_n|$, ist es genug zu beweisen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent ist. Aber das ist einfach, weil

$$0 < b_n < 2|a_n|$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist. □

4.5.6. Funktionenreihen (und Potenzreihen). Biz jetzt haben wir Reihen betrachtet, deren Glieder reele Zahlen waren. Man kann aber auch Reihen betrachten, die aus Folgen von Funktionen definiert sind.

DEFINITION 4.123. Sei $(f_k(x))_{k\geq 0}$ eine Folge von Funktionen, wobei $f_k : X \to \mathbb{R}$ und $X \subset \mathbb{R}$. Der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

heisst eine *Funktionreihe*.

Die Menge $\{x \in X : \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ konvergiert}\}$ heisst der *Konvergenzbereich* der Funktionreihe.

BEISPIEL 4.124.

(1) Falls $f_k(x) := \frac{1}{k!}x^k$, heisst

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die *Exponentialreihe*. Der Definitionsbereich der f_k ist $\operatorname{dom} f_k = \mathbb{R}$ und wir werden sehen, dass der Konvergenzbereich der Exponentialreihe auch $\mathbb{R}$ ist.

(2) Falls $f_k(x) := x^k$, ist $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ die geometrische Reihe. Der Konvergenzbereich von $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $(-1, 1)$ und für jedes $x \in (-1, 1)$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\,.$$

Der Definitionsbereiche von $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ist aber $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, deshalb besitzt die Funktionreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ eine Fortsetzung auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(3) Falls $f_k(x) := a_k x^k$, wobei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge ist, heisst

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine *Potenzreihe*. Die Folge $(a_k)_{k\geq 0}$ kann eine reelle oder eine komplexe Reihe sein. Deshalb sollten wir jetzt eine Umleitung nehmen und uns mit komplexen Zahlen beschäftigen.

4.5.7. Komplexe Zahlen.

SATZ 4.125 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom $p_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ mit koeffizienten $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, die mit Vielfachheiten gezählt sind.*

Um die Komplexe Zahlen zu definieren, müssen wir nur die Wurzeln $\sqrt{-1}$ zu der reelle Zahlen zufügen.

Definition 4.126. Eine *komplexe Zahl* ist eine Ausdruck der Form

$$z := x + iy\,,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind und i ist die *imaginäre Einheit*, d.h. i ist durch die Gleichheit

$$i^1 = -1$$

definiert. Dann heisst x der *reelle Teil* von z und y heisst der *imaginäre Teil* von z. Wir schreiben beziehungsweise

$$x = \Re z \qquad \text{und } y = \Im z\,.$$

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heisst *rein imaginär*, falls $\Re z = 0$.

Vorsicht. Der imaginäre Teil $\Im z$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eine reelle Zahl.

Wir können deshalb schreiben

$$\mathbb{C} := \{z := x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}\,.$$

Man kann die folgenden Operationen mit komplexe Zahlen ausführen. Seien $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ mit $j = 1, 2$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
(2) $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
(3) $a \cdot z_j = ax_j + iy_j$.

Bemerkung 4.127. (1) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist $z = w$ genau dann, wenn $\Re z = \Re w$ und $\Im z = \Im w$.

(2) Es gibt eine eindeutige komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $z + \alpha = z$ für jede $z \in \mathbb{C}$. In der Tat folgt aus $z + \alpha = z$, dass

$$\Re z + \Re\alpha = \Re z \qquad \text{und} \qquad \Im z + \Im\alpha = \Im z\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\Re\alpha = \Im\alpha = 0$$

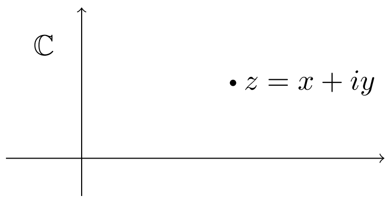
so, dass

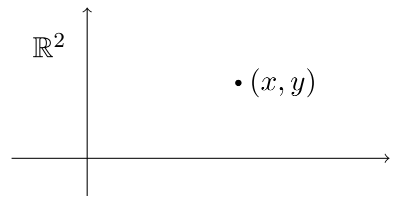
$$\alpha = 0 + i0 =: 0 \in \mathbb{C}\,.$$

(3) En gibt eine eindeutige komplexe Zahl $\beta \in \mathbb{C}$ so, dass $z \cdot \beta = \beta \cdot z = z$ und man kann ähnlich zu (2) beweisen, dass $\beta = 1 + i0 = 1 \in \mathbb{C}$.
(4) Für jede $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es eine eindeutige $z' \in \mathbb{C}$ so, dass $zz' = z'z = 1$.

Diese Eingenschaften zusammen mit der Operationen zeigen, dass die komplexen Zahlen ein *Korper* sind.

Der Korper $\mathbb{C}$ der komplexe Zahlen kann mit $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ identifiziert werden.

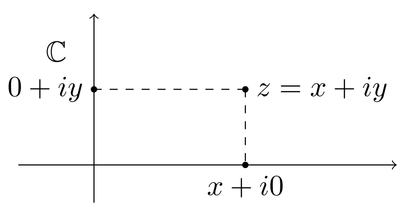


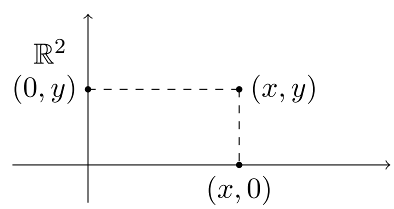


Der komplexen Zahl $x + iy$ ordnet man das Paar (x, y) zu

$$z = x + iy \leftrightarrow (x, y)\,.$$

Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ formen die komplexe Zahlen mit verschwindenden imaginären Teil die x-Achse und die komplexe Zahlen mit verschwindenden reellen Teil die y-Achse.

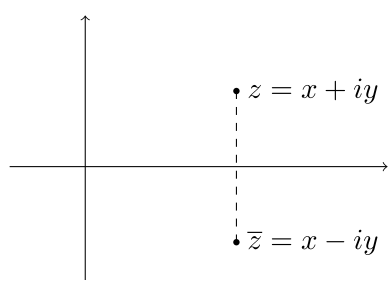




Die zu z *konjugierte* komplexe Zahl $\overline{z}$ ist

$$\overline{z} = x - iy\,.$$

Die Punkte z und $\overline{z}$ liegen spiegelbildlich zur reellen Achse.



Wir haben dann

(1) $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $y = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$;
(2) $\overline{(\overline{z})} = z$;
(3) $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

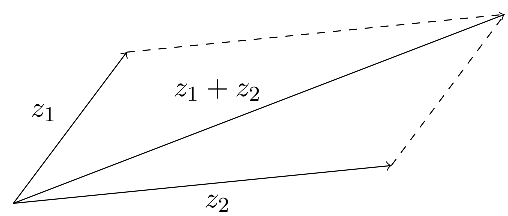
Der *Absolutbetrag* $|z|$ von $z = x + iy$ ist

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und beträgt den Abstand des Punktes $z = x + iy$ vom Ursprung.

Eigenschaften (Eigenschaften des Absolutbetrags). (AB1) $|z| = |\overline{z}|$;
(AB2) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$;
(AB3) $|\Re z| \leq |z|$ *und* $|\Im z| \leq |z|$;

(AB4) $||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, *d.h. die Länge einer Kante eines Dreieckes immer kleiner gleich als die Summe der Längen der anderen zwei Kanten ist. Das ist die sogenannte* Dreiecksungleichung.



Wir werden nur die Dreiecksungleichung beweisen.

Beweis der Dreiecksungleichung. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)\\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2\\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 - 2|z_1|\,|z_2| + 2\Re z_1\overline{z}_2\\
&= (|z_1|+|z_2|)^2 - 2|z_1\overline{z}_2| + 2\Re(z_1\overline{z}_2)\,.
\end{aligned}$$

Daraus und aus (AB3) erhalten wir

$$|z_1+z_2|^2 - (|z_1|+|z_2|)^2 = 2\Re(z_1\overline{z}_2) - 2|z_1\overline{z}_2| \le 0$$

so, dass

$$|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$$

und

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|\,.$$

Um der Ungleichung an der linken Seite von (AB4) zu beweisen, setzen wir $w_1 := -z_2$ und $w_2 := z_1+z_2$, und benutzen wir die gerade bewiesen rechte Seite. Wi erhalten

$$|w_2| \le |w_1+w_2| + |w_1|$$

und deshalb

$$|w_2| - |w_1| \le |w_1+w_2|\,.$$

Falls $|w_2| > |w_1|$ erhalten wir

$$||w_2| - |w_1|| \le |w_1+w_2|\,.$$

Falls $|w_2| < |w_1|$, austauschen wir die Rollen von w_1 und w_2 vom Anfang, d.h. wir setzen $w_1 := z_1+z_2$ und $w_2 = -z_2$. □

Bemerkung 4.128.

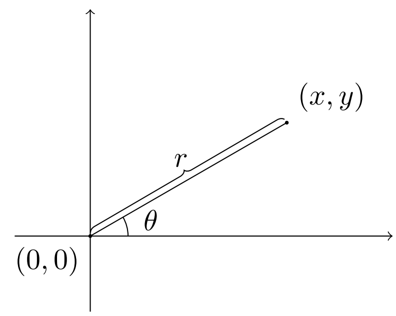
$$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}} = \frac{z\cdot\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{xu-yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\,.$$

4.5.7.1. *Polardarstellung.* Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir können schreiben

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\,, \end{cases}$$

wobei $r > 0$ der Abstand des Punktes z vom Ursprung ist und θ ist der *Polarwinkel*, d.h. der Winkel zwischen dem Vektor vom Ursprung nach z und der positiven x-Aches. Wir nehmen an, dass $0 \leq \theta < 2\pi$.

Der Polarwinkel von (z ist auch das *Argument* von $z = x + iy \simeq (x, y)$ genannt.



Da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\theta = y/x$, bemerken wir, dass wenn wir θ zwischen 0 un 2π nehmen, wir eine Wahl treffen, indem wir eine bestimmte Lösung der Gleichung

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

wählen. Eigentlich hat die Gleichung $\tan\theta = y/x$ die Lösungen $\theta + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. θ ist bis auf additive ganzahlige vielfache von 2π definiert. Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ haben wir auch

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,.$$

Mithilfe der *Eulerschen Formel*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.10}$$

erhalten wir der *Polardarstellung* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = |z|e^{i\theta}\,.$$

Diese Formel ist sehr nützlich.

Beispiel 4.129. Wir sind daran interessiert, die n-te Wurzel einer komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}$ zu finden. Wir suchen $z \in \mathbb{C}$ so, dass

$$z^n = a\,.$$

Wir behaupten, dass es n verschiedene Wurzel von a gibt. Da die Exponentialfunktion periodisch ist

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi k)} \qquad \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}\,,$$

schreiben wir

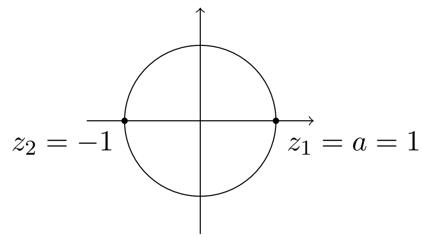
$$z^n = a = |a|e^{i\theta} = |a|e^{i(\theta+2\pi k)} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann ist

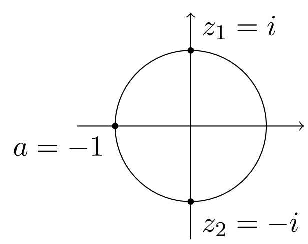
$$z_k = a^{1/n} e^{1\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

und man kann sich leicht überzeugen, dass diese Wurzeln alle verschiedene sind.

(1) $a = 1$ und $n = 2$

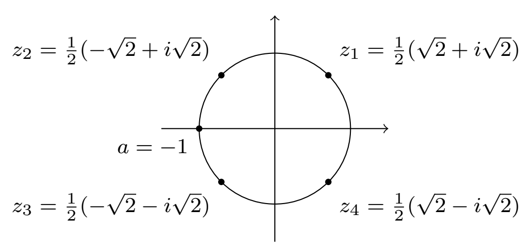


(2) $a = -1$ und $n = 2$



Das Argument erster n-ten Wurzeln von $a = -1$ beträgt 1/2-mal dem Argument von $a = -1$ und die anderen Wurzeln können gefunden werden, indem man $\frac{2\pi}{n}$ zum argument von $a = -1$ addiert.

(3) $a = -1$ und $n = 4$



4.5.8. Potenzreihen.

Definition 4.130. Eine *Potenzreihe* (*an der Stelle* $z_0 = 0$) ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k ,$$

wobei die a_k die *Koeffizienten* sind. Eine Potenzreihe an der Stelle z_0 ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

Bemerkung 4.131. Man kann z als eine komplexe Variable oder als eine reelle variable x betrachten.

Die Konvergenz einer Potenzreihe hängt von den Koeffizienten ab. In der Tat gilt der folgende Satz.

Satz 4.132. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe und nehmen wir an, dass*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =: \rho \tag{4.11}$$

existiert mit $0 \le \rho \le \infty$. Dann ist dir Reihe für $|z-z_0| < \rho$ absolut konvergent und für $|z-z_0| > \rho$ divergent.

Definition 4.133. Der Limes ρ in (4.11) heisst das *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ (bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$) und

$$D_{\rho,z_0} := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \rho\}$$

(bzw. $D_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$) ist die *Konvergenzscheibe* der Reihe.

Bemerkung 4.134. Man kann nichts über die Konvergenz der Reihe auf dem Kreis $|z-z_0| = \rho$ herleiten.

Wir werden den Satz nicht beweisen, er ist nur die Version des Quotientenkriteriums für Potenzreihen (Satz 4.116). Man muss aber aufpassen, dass

(1) eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit $b_n > 0$ konvergiert, falls $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, und
(2) eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für jedes z mit $0 \le |z| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Wir werden aber versuchen, the Beziehung zwischen Satz 4.132 und Satz 4.116 zu erklären. Nehmen wir an, dass der Limes $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert und nennen ρ den Limes, wie in (4.11). Der Einfachheit halber, nehmen wir an, dass $\rho \neq 0$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\rho}\,. \tag{4.12}$$

Betrachten wir jetzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wobei

$$b_n := |a_n z^n|\,.$$

Wegen des Satzes 4.116 ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ und divergent wenn $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$. Aber

$$1 > \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}z|}{|a_n|} = |z|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{(4.12)}{=} \frac{|z|}{\rho}$$

und das ist zu

$$|z| < \rho$$

äquivalent. Wegen des Satzes 4.122 ist in diesem Fall die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent. Falls $|z| > \rho$, ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergent.

Beispiel 4.135. Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ und wir behaupten, dass sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent ist. In der Tat ist $a_k = \frac{1}{k!}$ so, dass

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty\,.$$

Definition 4.136. Die Exponentialreihe ist

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{4.13}$$

und sie ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Beispiel 4.137. Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, für $x \in \mathbb{R}$. Da $a_k = \frac{1}{k}$, ist

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1\,.$$

Daraus folgt, dass die Reihe absolut konvergent für $0 \leq |x| < 1$ ist. Falls $x = 1$, ist die Reihe divergent (harmonische Reihe, Beispiel 4.108); falls $x = -1$ ist die Reihe konvergent (alternierende harmonische Reihe, Beispiel 4.109).

Beispiel 4.138. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$ hat Konvergenzradius $\rho = 1$ für jedes n. In der Tat ist $a_k = k^n$ so, dass

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^n}{(k+1)^n} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n} \right| = 1\,.$$

Beispiel 4.139. Betrachten wir die Reihe

$$1 + 2z^2 + zx^4 + 8z^6 + 16z^8 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}\,.$$

Man kann den Satz direkt nicht anwenden, weil

$$a_k = \begin{cases} 2^{k/2} & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Folge $\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ nicht konvergent ist, weil

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \begin{cases} \infty & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir setzen aber $z^2 =: u$ so, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k u^k\,,$$

wobei die Koeffizienten $b_k := 2^k$ sind. Daraus folgt, dass

$$\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right| = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} = \rho$$

so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u^k$ absolut konvergent für $|u| < \frac{1}{2}$ ist. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$ absolut konvergent für $|z^2| = |u| < \frac{1}{2}$ ist, d.h. für $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ein analog des Wurzelkriterium gilt auch für die Potenzreihen.

Satz 4.140. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe und nehmen wir an, dass*

$$\rho := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(|a_k|)^{1/k}}$$

mit $0 \le \rho \le \infty$. Dann ist die Reihe auf der Scheibe

$$D_{\rho,z_0} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < \rho\}$$

absolut konvergent und für $|z-z_0| > \rho$ divergent. Der ρ ist der Konvergenzradius der Reihe.

Beispiel 4.141. Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k}(z-2)^k$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\left|\frac{k^k}{(k+1)^k}\right|\right)^{1/k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

und die Reihe ist deshalb auf der Scheibe $D_{1,2} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-2| < 1\}$ konvergent.

4.5.8.1. *Rechnen mit Potenzreihen.* Wir werden keine der folgenden Aussagen beweisen.

Eigenschaften (Eigenschaften der Potenzreihen). (PR1) *Die Summe einer Potenzreihe ist innerhalb der Konvergenzscheibe eine stetige Funktion.*

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius ρ_a und ρ_b.

(PR2) *Der Konvergenzradius der Summe der Reihen ist*

$$\rho = \min\{\rho_a, \rho_b\}$$

und für jedes $0 \le |z| < \rho$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n\,.$$

(PR3) *Der Konvergenzradius des Produktes der Reihen ist*

$$\rho = \min\{\rho_a, \rho_b\}$$

und für jedes $0 \leq |z| < \rho$ *gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_n b_{k-n} z^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+j=n} a_k b_j z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j z^n \,.$$

4.5.8.2. *Die Binomialreihe.* Wir haben schon die Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ definiert. Wir definieren hier die Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Definition 4.142. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist den *Binomialkoeffizient*

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \,. \end{cases}$$

Bemerkung 4.143. Falls $\alpha \in \mathbb{N}$ ist

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

so, dass die zwei Definitionen übereinstimmen.

Lemma 4.144. *Falls* $k > \alpha$ *ist* $\binom{\alpha}{k} = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha \in \mathbb{N}$.

Proof. ($\Leftarrow$) Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ und $k > \alpha$. Dann ist $k = \alpha + j$ mit $j \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k$. Daraus folgt, dass $\alpha - k + j = 0$ und

$$\alpha - k + 1 \leq \alpha - k + j \leq \alpha - k + k = \alpha$$

so, dass

$$\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) = 0 \,.$$

($\Rightarrow$) Falls $\binom{\alpha}{k} = 0$, ist $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) = 0$. Daraus folgt, dass es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq k$ und $\alpha - k + j = 0$ gibt. Dann ist $\alpha \in \mathbb{N}$ (und $k > \alpha$). □

Wegen des Lemmas 4.144 setzen wir

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{falls } k > n \,.$$

Es folgt aus dem Lemma 4.144, dass die *Binomialreihe*

$$b_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \tag{4.14}$$

ein Polynom ist, falls $\alpha \in \mathbb{N}$. In diesem Fall haben wir schon gesehen (Beispiel 4.89), dass

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \,.$$

Daraus folgt, dass die Summe der Reihe $b_\alpha(x)$ für jedes x in der Konvergenzscheibe gleich $(1+x)^\alpha$ ist. Wir müssen nur für eine biliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenz der Binomialreihe in (4.14) untersuchen.

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \left| \frac{(k+1)!}{k!} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)} \right| = \frac{k+1}{|\alpha-k|} \to 1 \qquad \text{mit } k \to \infty \,.$$

Daraus folgt, dass die Binomialreihe absolut konvergiert für jedes x mit $0 \leq |x| < 1$.

Satz 4.145. *Die Summe der Binomialreihe ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha$$

für $0 \leq |x| < 1$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel 4.146. (1) Falls $\alpha = \frac{1}{2}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\dots(\frac{3}{2}-k)}{k!} x^k = (1+x)^{1/2} \,.$$

(2) Falls $\alpha = -1$ und $y = -x$ ist die Binomialreihe gleich der geometrischen Reihe.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-y} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-y)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\dots(-1-k+1)}{k!} (-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(-1)^k}{k!} (-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \,.
\end{aligned}$$

(3) Falls $\alpha = -2$ und $y = -x$ ist

$$
\begin{aligned}
(1-y)^{-2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-y)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\dots(-2-k+1)}{k!} (-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!(-1)^k}{k!} (-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) y^k
\end{aligned}
$$

4.6. Die Exponentialfunktion

Wir haben schon in (4.13) die Exponentialfunktion als die Exponentialreihe

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert. Wir möchten jetzt daraus die Eigenschaften dieser Funktion herleiten.

Satz 4.147. *Für jedes $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp z \exp w\,. \tag{4.15}$$

Bemerkung 4.148. Man konnte auch die Exponentialfunktion definieren, als die einzige Funktion, die die Funktionalgleichung (4.15) und $\exp 0 = 1$ erfüllt.

Beweis von Satz 4.147. Wir können das Produkt von zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ als in (R5) schreiben oder auch als

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n\right) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k+j=n} a_k b_j z^k w^j}_{\substack{\text{Summe aller Mitglieder} \\ \text{des Grades } n}} \qquad (4.16) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j z^{n-j} w^j\,.
\end{aligned}
$$

Wegen der Definition der Exponentialreihe und mit $a_k = \frac{1}{k!}$ und $b_n = \frac{1}{n!}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\exp(z+w) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} w^j \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!} z^{n-j} w^j \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!j!} z^{n-j} w^j \\
&\quad \overset{(4.16)}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} w^j \right) \\
&\quad = (\exp z)(\exp w)\,.
\end{aligned}$$

□

Definition 4.149. Die *Eulersche Zahl* ist durch

$$e := \exp 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

definiert.

Aus dieser Definition und der Eigenschaft in (4.15) folgt, dass

$$e^n = \underbrace{e \cdot \dots \cdot e}_{n-\text{Mal}} = \underbrace{(\exp 1) \dots (\exp 1)}_{n-\text{Mal}} = \exp n\,.$$

Des Weiteren ist

$$e^{1/q} = \exp \frac{1}{q}\,,$$

da

$$\left(\exp \frac{1}{q}\right)^q = \underbrace{\left(\exp \frac{1}{q}\right) \dots \left(\exp \frac{1}{q}\right)}_{q-\text{Mal}} = \exp\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = \exp 1 = e\,.$$

Daraus folgt, dass

$$e^{p/q} = \exp \frac{p}{q}\,.$$

Da exp stetig auf dem Definitionsbereich ist, kann man für $x \in \mathbb{R}$ e^x durch $e^{p/q}$ approximieren. Sei $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ ein Folge von rationellen Zahlen so, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x\,.$$

Wegen der Stetigkeit von der Exponentialfunktion gilt

$$e^x := \exp x = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \exp \frac{p_n}{q_n}\,.$$

Wir haben deshalb e^x durch $\exp x$ definiert und wir werden beide Schreibweisen, $\exp x$ und e^x verwenden.

Eigenschaften (Eigenschaften der Exponentialfunktion). (E1) *$e^x > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$;*
(E2) *Die Zuordnung $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend;*
(E3) *$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Exponentialfunktion wächst schneller also jede feste Potenz;*
(E4) *$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.*

Proof. Wir werden nur (E3) beweisen. In der Tat gilt

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}\,.$$

Die Aussage folgt jetzt aus der Vergleichskriterium Lemma 4.77. □

Beispiel 4.150. Wir möchten zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp z\,.$$

Wir werden zwei Methoden benutzen.

1. Methode: Wir wissen, dass

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k\,.$$

Des Weiteren ist

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} < \frac{1}{k!} \tag{4.17}$$

und auch

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\,. \tag{4.18}$$

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq \ell \leq n$. Mithilfe von (4.17) gilt

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=\ell+1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \overset{(4.17)}{<} \sum_{k=\ell+1}^{n} \frac{1}{k!} x^k .$$

Wir können den Limes als $n \to \infty$ nehmen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \leq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=\ell+1}^{n} \frac{1}{k!} x^k .$$

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\ell} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k \overset{(4.18)}{=} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{x^k}{k!}$$

und der Definition del Exponentialfunktion folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\ell} \frac{x^k}{k!} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x .$$

Um die Aussage zu prüfen, ist es jetzt genug den Limes als $\ell \to \infty$ zu nehmen und den Satz 4.102 zu anzuwenden.

2. Methode: (Es gibt Schritte, die begründet werden sollten.) Wegen des Binomialsatzes 4.145 wissen wir, dass

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k .$$

Wir nehmen an, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k .$$

(Dieser Umtausch der Grenzwerte sollte begründet werden, aber wir werden es nicht machen.) Es gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!} .$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp z .$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

4.6.1. Die Logarithmusfunktion. Da $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton wachsend ist, besitzt sie eine Umkehrfunktion

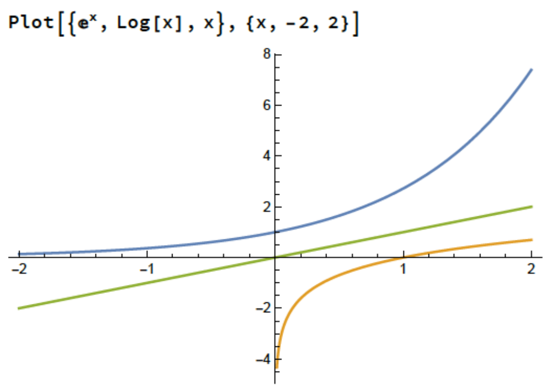
$$(\exp)^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}\,.$$

Definition 4.151. Die *natürliche Logarithmusfunktion* ist die Umkehrung

$$\log x := (\exp)^{-1}(x)\,.$$

der Exponentialfuntkion.

Eigenschaften (Eigenschaften der Logarithmusfunktion). (L1) $\log(\exp t) = t$ *für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *und* $\exp(\log x) = x$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}_{>0}$*;*
(L2) $lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$*;*
(L3) $\log x + \log y = \log(xy)$ *für jedes* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$*.*



Mithilfe von Logarithmus kann man eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion definieren. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Aus (L3) folgt, dass für jedes $p \in \mathbb{N}$

$$\log(a^p) = \log(a^{p-1}a) = \log(a^{p-1}) + \log a = \cdots = p \log a \tag{4.19}$$

Anderseits gilt für jedes $q \in \mathbb{N}$

$$\log a = \log((a^{1/q})^q) = q \log(a^{1/q})$$

so, dass

$$\log(a^{1/q}) = \frac{1}{q} \log a\,,$$

die zusammen mit (4.19) gibt

$$\log(a^{p/q}) = \frac{p}{q} \log a$$

oder

$$a^{p/q} = e^{p/q \log a}\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist

$$a^x := e^{x \log a}\,, \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0$$

die *allgemeine Potenz*.

Eigenschaften (Eigenschaften der allgemeinen Potenz). *Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ und für jedes $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt*

(AP1) $\log(a^x) = x \log a$
(AP2) $a^{x+y} = a^x a^y$;
(AP3) $(ab)^x = a^x b^x$;
(AP4) $(a^x)^y = a^{xy}$;
(AP5) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ *für jedes* $\alpha > 0$ *und* $\lim_{x\to 0^+}(x^\alpha \log x) = 0$, *d.h. die Logarithmusfunktion wächt langsamer als jede feste Potenz.*

Beweis von (AP5). Mit $y = \log x$ und $ay = t$ haben wir einerseits

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \overset{\text{(E3)}}{=} 0$$

und anderseits mit $y = \log x$ und $\alpha y = -t$

$$\lim_{x\to 0^+} (x^\alpha \log x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{\alpha \log x} \log x) = \lim_{y\to\infty} e^{\alpha y} y = -\frac{1}{\alpha} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \overset{\text{(E3)}}{=} 0\,.$$

□

Beispiel 4.152.

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = \lim_{z\to 0} \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) = \lim_{z\to 0} e^z = 1\,.$$

4.6.2. Hyperbolische und trigonometrische Funktionen.

4.6.2.1. *Hyperbolische Funktionen.* Wir schreiben e^t als die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion

$$e^t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,.$$

Definition 4.153. Der *hyperbolische Cosinus*

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

der *hyperbolische Sinus*

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

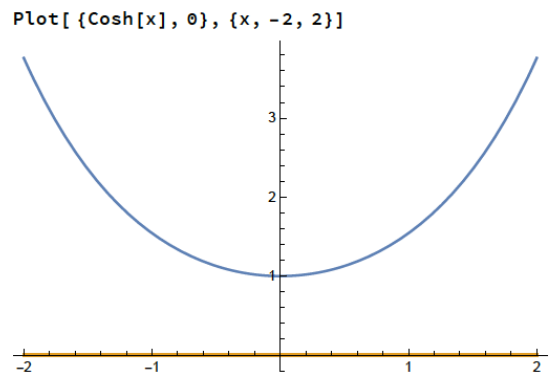
und der *hyperbolische Tangens*

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

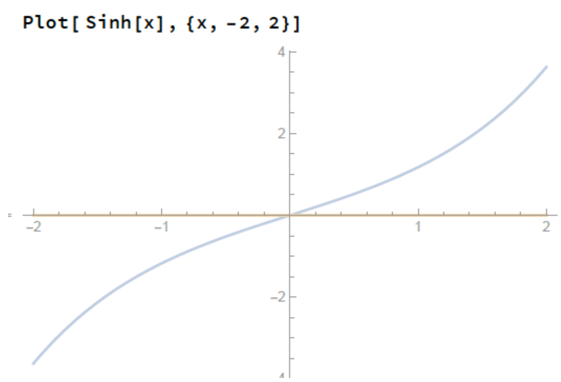
sind durch die folgenden Ausdrücke definiert:

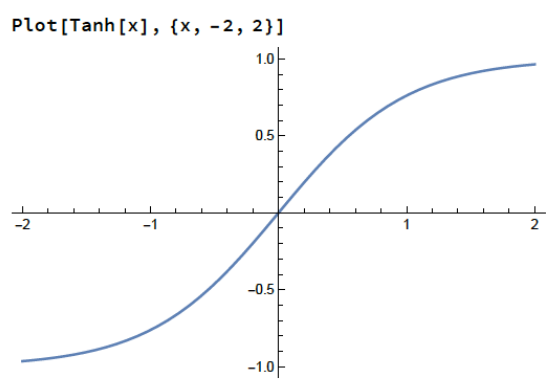
$$\begin{aligned} \cosh t &:= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ \sinh t &:= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \tanh t &:= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{\sinh t}{\cosh t}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.154. (1) Die Funktion $\cosh t$ ist gerade und auf $\mathbb{R}$ definiert, deshalb sie nicht injektiv sein kann.



(2) Die Funktion $\sinh t$ ist die Summe zwei streng monoton wachsend Funktionen, deshalb sie streng monoton wachsend ist.





(3) Diese Funktionen heissen *hyperbolische Funktionen*, weil $(\cosh t, \sinh t)$ die Koordinates eines Punktes auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ darstellen.

Eigenschaften (Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen). (HF1) $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$;

(HF2) $\cosh(t+s) = \cosh t \cosh s + \sinh t \sinh s$;

(HF3) $\sinh(t+s) = \sinh t \cosh s + \cosh t \sinh t\,.$

Da $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ und $e^t = \cosh t + \sinh t$, wobei $\cosh t$ (bzw. $\sinh t$) gerade (bzw. ungerade) ist, erhalten wir

$$\cosh t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad \sinh t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

4.6.2.2. *Trigonometrische Funktionen.* Wir möchten jetzt die Potenzreihe der trigonometrischen Funktionen erhalten. Aus der Eulerschen Formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

folgt, dass

$$\begin{aligned}
\cos t &= \Re(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + \overline{e^{it}}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \text{ und} \\
\sin t &= \Im(e^{it}) = \frac{1}{2i}(e^{it} - \overline{e^{it}}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}
\end{aligned}$$

so, dass

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{und} \qquad \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n + (-it)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Re(it)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Re(it)^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Abhängig von n ist $(it)^n$ entweder rein imaginär oder reell.

$$(it)^n = i^n t^n \qquad \text{und} \qquad i^n = \begin{cases} 1 & n = 4j \\ i & n = 4j+1 \\ -1 & n = 4j+2 \\ -i & n = 4j+3\,. \end{cases}$$

Falls

(1) n ungerade ist, ist $(it)^n$ rein imaginär so, dass $\Re(it)^n = 0$;

(2) n gerade ist, ist $(it)^n = \pm t^n$, wobei
 (a) $n = 2 \cdot 2j \Rightarrow (it)^n = t^n \Rightarrow \Re(it)^n = t^n = (-1)^{2j} t^{2\cdot 2j}$;
 (b) $n = 2 \cdot (2j+1) \Rightarrow (it)^n = -t^n \Rightarrow \Re(it)^n = -t^n = (-1)^{2j+1} t^{2\cdot(2j+1)}$,

das heisst

$$\Re(it)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ (-1)^k & n = 2k\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Re(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\,.$$

4.6.2.3. *Beziehung zwischen hyperbolischen und trigonometrische Funktionen.* Wir können auch die trigonometrische und hyperbolische Funktionen für eine komplexe Variable definieren. In diesem Fall haben wir die folgenden Identitäten, für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos z & \qquad \cos iz &= \cosh z \\ \sinh iz &= i \sin z & \qquad \sin iz &= i \sinh z\,. \end{aligned}$$

4.6.2.4. *Elementare Funktionen.*

Definition 4.155. Funktionen, die sich mithilfe dieser Operationen aus x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), trigonometrische Funktionen (und deren Umkehrfunktionen), $\log x$ und e^x erhalten lassen, heissen *elementare Funktionen*.

Beispiel 4.156. $f(x) := \frac{\arctan \sqrt{e^x + 17 \sin(\log x)}}{\cos(x^2 + e^{\tan^3 x})}$ ist eine elementare Funktion, aber $f(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ ist keine elementare Funktion.

CHAPTER 5

Differentialrechnung in einer Variable

5.1. Die Ableitung

Definition 5.1. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in X$. Die Funktion f heisst *differenzierbar an der Stelle* x_0, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heisst

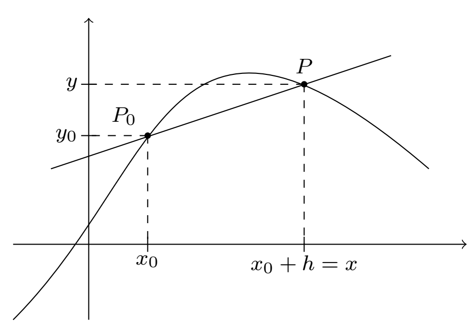
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

die *Ableitung* von f an der Stelle x_0. Die Funktion f heisst *differenzierbar auf* X, falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ existiert.

Geometrische Bedeutung. Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Falls $x \to x_0$, strebt der Punkt $(x, f(x))$ nach dem Punkt $(x_0, f(x_0))$ Die Steigung der Sekante strebt nach der Steigung der Graphentangente $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.



Notation. $f'(x_0)$ ist die Newton Schreibweise. Falls wir $x = x_0 + \Delta x$ und $f(x) = f(x_0) + \Delta f$ schreiben, haben wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

und wir erhalten die Leibniz Schreibweise $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Die Ableitung ist durch einen Limes definiert. Falls der Limes nicht existiert, existieren manchmal die einseitige Grenzwerte. Man kann deshalb die einseitige Ableitungen $f'(x_0^+)$ und $f'(x_0^-)$ definieren.

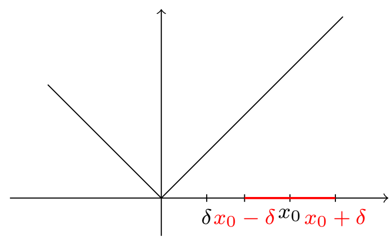
$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^\pm).$$

Beispiel 5.2. Sei $f(x) := |x| = x \operatorname{sgn} x$ and sei $x_0 \neq 0$.

Für jedes δ mit $0 < \delta < |x_0|$ und jedes x mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ist

$$\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} x_0 .$$

(Der Grund ist, dass das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ den Ursprung nicht enthält.)
Daraus folgt, dass falls $x_0 \neq 0$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x \operatorname{sgn} x - x_0 \operatorname{sgn} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \operatorname{sgn} x_0}{x - x_0} = \operatorname{sgn} x_0 .$$

Falls $x_0 = 0$, existieren die einseitige Ableitungen $f'(0^+) = 1$ und $f'(0^-) = -1$, aber die Funktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel 5.3. Wir suchen die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots - 1 \right) \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \right) \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \right) \\
&= e^x .
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f(x) = e^x$ unendlich oft differenzierbar ist.

Beispiel 5.4. Wir möchten die Ableitung der Funktion $f(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, berechnen. Wegen des Binomialsatzes 4.145 für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ (oder wegen des Beispiels 4.89) gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k h^{n-k} - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k h^{n-k-1} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{0}x^0 h^{n-1} + \binom{n}{1}x^1 n^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}x^{n-2}h^1 + \binom{n}{n-1}x^{n-1}h^0\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k+1}x^{\alpha-k-1}h^k \\
&= \binom{n}{n-1}x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Satz 5.5. *Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 stetig.*

Proof. Wir möchten beweisen, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, oder, was ist äquivalent, dass

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0\,.$$

In der Tat gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0))x - x_0 = 0\cdot f'(x_0) = 0\,.$$

□

Bemerkung 5.6. Beispiel 5.2 mit $x_0 = 0$ zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht wahr ist: eine an der Stelle x_0 steitige Funktion ist nicht unbedingt an dieser Stelle differenzierbar.

Definition 5.7. (1) Die *zweite Ableitung* an der Stelle x_0 der Funktion f ist die Ableitung an Stelle x_0 der Ableitung von f

$$f''(x_0) := \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \left.\frac{df'}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

(2) Die *n-te Ableitung* einer Funktion an einer Stelle x_0 ist die erste Ableitung der $(n-1)$-te Ableitung der Funktion f.

Bemerkung 5.8. Damit eine Funktion zweimal (bzw. n-Mal) an der Stelle x_0 differenzierbar ist, muss die erste (bzw. $(n-1)$-te) Ableitung auf einer Umgebung $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ existieren.

5.2. Rechnen mit Ableitungen

EIGENSCHAFTEN (Eigenschaften der Ableitungen). *Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen:*

(Ab1) *Für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ an der Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar und*
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\,;$$
(Ab2) *(fg) ist differenzierbar und*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,;$$
(Ab3) *Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,;$$
(Ab4) *Falls* $\operatorname{image}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$, *ist die Verkettung $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar und*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$
(Ab5) *Sei $f\colon X \to Y$ bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$. Dann gilt für $y_0 \in Y$*
$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,,$$
falls $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ ist.

PROOF. Wir werden nur (Ab5) verifizieren. Sei $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$, d.h. $x = f^{-1}(y)$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Da wegen des Satzes 5.5
$$y \to y_0 \Leftrightarrow x \to x_0\,, \tag{5.1}$$
gilt
$$\begin{aligned}(f^{-1}(y_0))' &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}\\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}\\ &= \frac{1}{f'(x_0)}\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\end{aligned}$$
□

Beispiel 5.9. Falls $g(y) = \log y = f^{-1}(y)$, wobei $f(x) = e^x$, gilt

$$\frac{d}{dy}(\log y) = \frac{1}{\exp'(\log y)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}\,.$$

Beispiel 5.10. Sei $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann ist einserseits

$$\frac{d}{dx}(x^y) = \frac{d}{dx}(e^{y\log x}) = e^{y\log x}y\frac{1}{x} = x^y\frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

und anderseits

$$\frac{d}{dy}(x^y) = \frac{d}{dy}(e^{y\log x}) = e^{y\log x}\log x = x^y \log x\,.$$

Beispiel 5.11.

$$\frac{d}{dt}(\cosh t) = \frac{d}{dt}\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

und

$$\frac{d}{dt}(\sinh t) = \frac{d}{dt}\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

Beispiel 5.12. Wir behaupten, dass

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \qquad \text{and} \qquad \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t\,.$$

In der Tat folgt aus

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\,, \tag{5.2}$$

dass

$$ie^{it} = \frac{d}{dt}(e^{it}) = \frac{d}{dt}(\cos t + i\sin t) = \frac{d}{dt}(\cos t) + i\frac{d}{dt}(\sin t)$$

oder

$$\begin{aligned} e^{it} &= \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= -i\frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= \frac{d}{dt}(\sin t) - i\frac{d}{dt}(\cos t) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Aussage folgt durch Vergleich von (5.2) und (5.3).

Beispiel 5.13. Die Ableitung des Tangens ist

$$\frac{d}{dt}(\tan t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = 1 + (\tan t)^2 = (\sec t)^2$$

und die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$\frac{d}{dy}(\arctan y) \overset{\text{(Ab5)}}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

5.3. Klein-o

In Mathematik benutzt man die folgende Notation;

Definition 5.14. Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir sagen, dass f *klein oh von g an der Stelle x_0 ist* und wir schreiben

$$f(x) = o(g(x)) \qquad \text{falls} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Beispiel 5.15.
(1) $f(x) = o(1)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$;
(2) Falls $f(x) = o(g(x))$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, dann $f(x)$ geht nach 0 für $x \to x_0$ schneller als $g(x)$;
(3) Falls $f(x) = o(g(x))$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, dann $f(x)$ wächst langsamer als $g(x)$.

Anwendung. Hier ist eine Anwendung zum Begriff der Ableitung. Sei f eine differenzierbare an der Stelle x_0 Funktion, d.h.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Wir können auch diese Gleichung so schreiben

$$0 = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

so, dass

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad \text{and der Stelle } x_0\,.$$

Anders gesagt ist die Funktion f and der Stelle x_0 differenzierbar, falls es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0) = o(x - x_0)$$

gibt. In diesem Fall ist $\alpha = f'(x_0)$. Diese Aufblick wird für die Definition der Ableitung einer Funktion mit mehreren Variable nützlich sein.

5.4. Globale Extremalstellen

Sei jetzt $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $X \subseteq \mathbb{R}$ und sei $W := \{f(x) : x \in X\} = \text{image}(f)$.

Definition 5.16. Wir sagen, dass f ein (*globales*) *Maximum* (bzw. *Minimum*) auf X besitzt, falls $\max W$ (bzw. $\min W$) existiert.

Falls f ein globales Maximum (bzw. Minimum) besitzt, gibt es mindestens ein $\xi \in X$ so, dass $f(\xi) = \max W$ (bzw. $f(\xi) = \min W$). Wir benutzen die Schreibweise

$$S_{\max} := \{\xi \in X : f(\xi) = \max W\}$$
$$S_{\min} := \{\xi \in X : f(\xi) = \min W\}$$

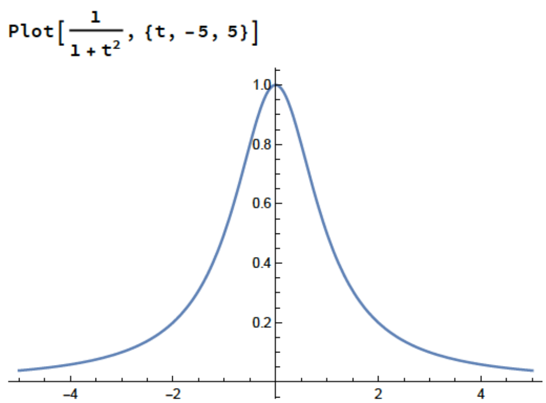
In der Tat

$S_{\max} \neq \varnothing$ (bzw. $S_{\max} \neq \varnothing$) $\Leftrightarrow$ f ein globales Maximum (bzw. Minimum) besitzt.

Wir sagen, dass $S_{\max}$ und $S_{\min}$ (*globale*) *Maximalstellen* und *Minimalstellen* sind und $S_{\max} \cup S_{\min}$ sind die (globale) *Extremalstellen*.

BEMERKUNG 5.17. Das Maximun und das Minimum sind Werte, die die Funktion nimmt. Sie sind deshalb im Bildbereich enthalten. Die Maximalstellen und Minimalstellen sind die Stellen, wobei das Maximum und das Minimum angenommen sind. Sie sind deshalb im Definitionsbereich enthalten.

BEISPIEL 5.18. Wir betrachten die Funktion $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ für $t \in \mathbb{R}$.



Aus $|image(f) = (0,1]$ folgt, dass

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = \max_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 1 \qquad \text{und } S_{\max} = \{0\}$$

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 0 \qquad \text{und } S_{\min} = \varnothing\,.$$

Ob eine Funktion Extremalstellen besitzt, hängt vom Definitionsbereich ab.

DEFINITION 5.19. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}$ heisst *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

SATZ 5.20. *Eine stetige Funkion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge besitzt immer ein globales Maximum und ein globales Minimum.*

BEISPIEL 5.21. Sei f wie im Beispiel 5.18 aber auf einem verschiedenen Definitionsbereich definiert, $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$. Dann gilt

$$\sup_{t\in[-1,1]} \frac{1}{1+t^2} = \max_{t\in[-1,1]} \frac{1}{1+t^2} = 1 \qquad \text{und } S_{\max} = \{0\}$$

$$\inf_{t\in[-1,1]} \frac{1}{1+t^2} = \min_{t\in[-1,1]} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{und } S_{\max} = \{-1,1\}\,.$$

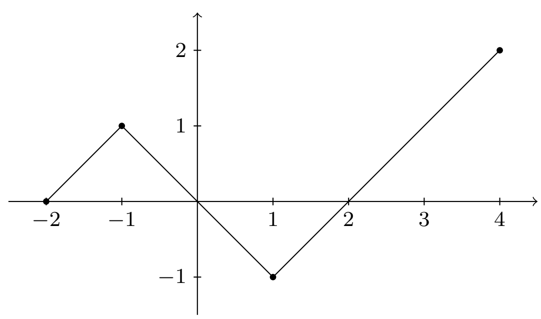
5.5. Lokale Extremalstellen

Definition 5.22. Die Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein *lokales Maximum* (bzw. ein *lokales Minimum*) an der Stelle x_0, falls es ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jedes $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$, $f(x) \le f(x_0)$ gilt (bzw. $f(x) \ge f(x_0)$).

Bemerkung 5.23.
(1) Ein lokales Maximum (bzw. Minumum) ist ein globales Maximum (bzw. Minimum) auf der Umgebung $\{x \in X : |x - x_0| < \delta\}$ von x_0.
(2) Ein globales Maximum (bzw. Minimum) ist auch ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beispiel 5.24. Sei $f\colon [-2,4] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x+2 & x \in [-2,-1] \\ -x & x \in [-1,1] \\ x-2 & x \in [1,4]\,. \end{cases}$$



(1) Die Punkte mit x-koordinate $x = -2$ und $x = 1$ sind lokale Minimalstelles und f ist an der Stelle $x = 1$ global minimal;
(2) Die Punkte mit x-koordinate $x = -1$ und $x = 4$ sind lokale Maximalstellen und f ist an der Stelle $x = 4$ global maximal.

Wie kann man die lokalen Extremalstellen finden?

Satz 5.25. *Sei $f\colon X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion und nehmen wir an, dass f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum an einem inneren Punkt $x_0 \in X$ besitzt. Falls $f'(x_0)$ existiert, ist $f'(x_0) = 0$.*

Definition 5.26. Ein Punkt $x_0 \in X$ mit $f'(x_0) = 0$ heisst ein *kritischer* oder *stationärer Punkt.*

Proof. Sei

$$Q(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \ne x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0\,. \end{cases}$$

Die Differenzierbarkeit der Funktion f and der Stelle x_0 ist äquivalent zur Stetigkeit der Funktion Q and der Stelle x_0. Wir können deshalb annehmen, dass

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)\,.$$

Wir müssen beweisen, dass $Q(x_0) = 0$ ist und dafür werden wir beweisen, dass $Q(x_0) > 0$ nicht möglich ist. Der Fall $Q(x_0) < 0$ ist ähnlich.

Sei $Q(x_0) > 0$. Da Q an der Stelle x_0 stetig ist, gibt es eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0, wobei $Q(x) > 0$. Das heisst, dass auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn}(x - x_0)\,.$$

Anders gesagt, gilt

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) && \text{falls} && x > x_0 \text{ und} \\ f(x) &< f(x_0) && \text{falls} && x < x_0\,. \end{aligned}$$

Das ist aber nicht möglich, weil x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. □

Bemerkung 5.27. (1) Die Umkehrung des Satzes 5.25 ist nicht wahr: falls $f'(x_0) = 0$, muss x_0 nicht unbedingt eine lokale Maximalstelle oder Minimalstelle sein.

Beispiel 5.28. Sie $f(x) := x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 0$, aber $x = 0$ ist kein lokales Maximum oder Minimum.

(2) Falls x_0 eine lokale Extremalstelle ist, ist nicht unbedingt $f'(x_0) = 0$. In der Tat kann f auch an der Stelle x_0 nicht differenzierbar sein.

Beispiel 5.29. Die Funktion $f(x) = |x|$ hat ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$, wobei f nicht differenzierbar ist.

Wie kann man die globale Extrema bestimmen? Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist. Seien $x_1, \dots, x_n$ kritische Punkte von f, $n < \infty$. Dann ist

$$S_{\max} \subseteq \{a, x_1, \dots, x_n, b\}$$

und

$$\max_{t \in [a,b]} f(t) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}\,.$$

Beispiel 5.30. Die durch $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2$ definierte Funktion $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ ist f auf $(-3,3)$ differenzierbar. Da

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

sind die Punkte mit x-Koordinate $x = 0$ und $x = 2$ kritische Punkte. Daraus folgt, dass

$$S_{\min}, S_{\max} \subseteq \{-3, 0, 2, 3\}$$

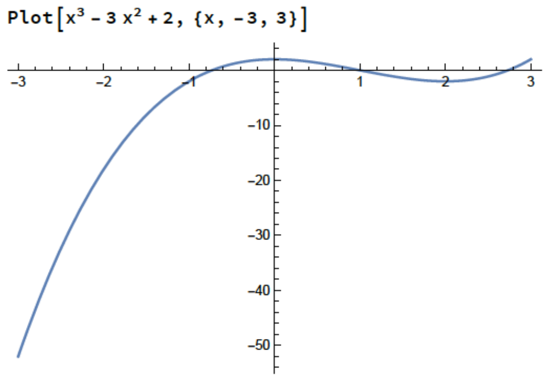
und

$$\max_{t\in[-3,3]} f(t) = \max\{f(-3), f(0), f(2), f(3)\} = \max\{-52, 2, -2, 2\} = 2$$

so, dass $x = 0$ und $x = 3$ sind die globale Maximalstellen. Anderseits gilt

$$\min_{t\in[-3,3]} f(t) = \max\{f(-3), f(0), f(2), f(3)\} = \max\{-52, 2, -2, 2\} = -52$$

so, dass $x = -3$ ist die globale Minimalstelle.



5.6. Der Mittelwertsatz

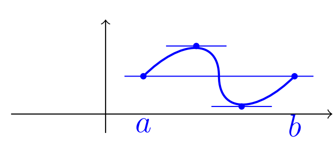
Der Mittelwertsatz ist sehr wichtig, weil man daraus viele Schlüsse ziehen kann. Wir fangen mit dieser einfacher Version an:

Satz 5.31 (Satz von Rolle). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) ist. Falls $f(a) = f(b)$, gibt es einen Punkt $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Wegen des Satzes 5.20, besitzt f ein globales Maximum M und ein globales Minimum m auf $[a, b]$. Seien $x_m, x_M \in [a, b]$ so, dass $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$. Falls x_m (bzw. x_M) ein kritischer Punkt in (a, b) ist, muss $f'(x_m) = 0$ (bzw. $f'(x_M) = 0$) sein und der Beweis ist fertig.

Falls weder x_m noch x_M kritische Punkte sind, folgt es aus dem Satz 5.20, dass x_m und x_M die Endpunkte des Intervalles $[a, b]$ sein müssen, d.h. $\{x_m, x_M\} = \{a, b\}$. Aus $f(a) = f(b)$ folgt, dass $m = M$ und deshalb ist f eine konstante Funktion. Daraus folgt, dass $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a, b)$. $\square$

Geometrische Bedeutung. Der Satz von Rolle sagt, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt, wo die Graphentangente parallel zur Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

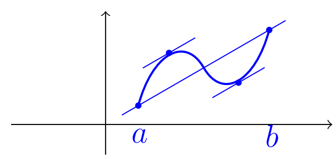


Der Mitterlwertsatz sagt, dass ein ähnlicher Schluss in einer allgemeineren Situation gilt.

Satz 5.32 (Mittelwertsatz oder Satz von Lagrange). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) ist. Dann gibt es einen Punkt $c \in (a,b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(b)}{b-a}\,.$$

Bemerkung 5.33. Im Satz von Rolle ist die Steigung der Gerade zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich 0. Im Mitterwertsazt ist $\frac{f(b)-f(b)}{b-a}$ auch die Steigung der Gerade zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Noch einmal sagt der Satz, dass es einen Punkt $c \in (a,b)$ gibt, wo die Graphentangente parallel zur Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.



Anwendung. Sei $f(t)$ die Distanz, die ein Auto in der Zeit t zurückliegt. Der Quotient $\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$ ist die durchschnittlich Geschwindigkeit auf dem Zeitintervall $[0,t]$ und $f'(c)$ ist die Momentangeschwindigkeit an der Zeit $t=c$. Falls $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} > 120$ Kilometer pro Stunde ist, werden wir eine Strafzettel bekommen. In der Tat gab es wegen des Mittelwertsatzes einen Zeitpunkt c, wobei wir mit Geschwindigkeit höher als 120 Km/h gefahren sind.

Beweis. Wir möchten den Satz von Rolle benutzen. Wir brauchen deshalb eine Funktion h, die stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) ist und die Bedingung $h(a) = h(b)$ erfüllt. Sei

$$h(x) := f(x)(b-a) - x[f(b) - f(a)]\,.$$

Die Funktion h ist offensichtlich stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Zudem folgt aus der Definition, dass

$$h(a) = f(a)(b-a) - a[f(b)-f(a)] = f(a)b - \cancel{f(a)a} - af(b) + \cancel{af(a)} = f(a)b - af(b)$$
$$h(b) = f(b)(b-a) - b[f(b)-f(a)] = \cancel{f(b)b} - f(b)a - \cancel{bf(b)} + bf(a) = f(a)b - af(b)\,.$$

Wir können deshalb den Satz von Rolle zur Funktion h anwenden. Daraus folgt, dass es ein $c \in (a,b)$ gibt so, dass $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = f'(x)(b-a) - f(b) + f(a)\,,$$

aus $h'(c) = 0$ folgt, dass $f'(c) = \frac{f(b)-f(b)}{b-a}$. □

Falls es einen Punkt $c \in (a,b)$ gibt, wobei die Funktion nicht differenzerierbar ist, gilt der Satz nicht. Das folgendes ist ein Beispiel, das diese Situation erklärt.

Beispiel 5.34. Wir betrachten die Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[a, b] = [-1, 2]$. Hier ist

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}\,.$$

Es gibt aber keinen $c \in (-1, 2)$ mit $f'(c) = \frac{1}{3}$.

Satz 5.35. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die stetig auf $[a, b]$ und auf differenzierbar (a, b) sind. Es gibt einen Punkt $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]\,.$$

5.7. Monotonie und Konvexität

Man kann den Mittelwertsatz benutzen, um die Eigenschaften des Graphes einer Funktion aus dem Vorzeichen der Ableitung zu erhalten.

Satz 5.36. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) ist.*

(1) *Falls für jedes $x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ ist , ist f streng monoton wachsend;*
(2) *Falls für jedes $x \in (a, b)$ $f'(x) < 0$ ist, ist f streng monoton fallend;*
(3) *Falls für jedes $x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$ ist, ist f auf (a, b) konstant.*

Beweis. (1) Wir müssen prüfen, dass $f(x_1) < f(x_2)$ für jedes $x_1 < x_2$ mit $a < x_1 < x_2 < b$ ist. Wir können den Mittelwertsatz auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_1, x_2]$ anwenden. Daraus folgt, dass es $\xi \in (x_1, x_2)$ gibt so, dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,,$$

oder

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)\,.$$

Da $x_2 > x_1$ und $f'(\xi) > 0$, muss $f(x_2) > f(x_1)$ sein.

(2) und (3) können ähnlich bewiesen werden. □

Korollar 5.37. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Da $\xi \in (a, b)$.*

(1) *Falls für jedes $x < \xi$ $f'(x) < 0$ und für jedes $x > \xi$ $f'(x) > 0$ ist, ist ξ eine lokale Minimalstelle.*
(2) *Falls für jedes $x < \xi$ $f'(x) > 0$ und für jedes $x > \xi$ $f'(x) < 0$ ist, ist ξ eine lokale Maximalstelle.*

Beweis. (1) Da für jedes $x < \xi$ $f'(x) > 0$ ist, ist f für $x < \xi$ streng monoton fallend (Satz 5.36 (2)). Anderseite ist f für $x > \xi$ streng monoton wachsend, da $f'(x) < 0$ für jedes $x > \xi$ ist (Satz 5.36 (1)). Die Funktion f hat an der Stelle $x = \xi$ ein lokales Minimum und ξ ist eine lokale Minimalstelle.

Die Aussage (2) kann ähnlich bewiesen werden. □

BEMERKUNG 5.38. Man kann einfach sehen, dass die Funktion f an der Stelle ξ nicht unbedingt differenzierbar sein muss, damit der Satz gilt. Zum Beispiel hat $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ am Ursprung ein lokales Minimum, da $f'(x) = -1$ für $x < 0$ und $f'(x) = 1$ für $x > 0$.

Man kann auch das Vorzeichen der zweiten Ableitung betrachten, um die Art eines kritischen Punktes zu bestimmen.

SATZ 5.39. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf dem Intervall (a, b).*

(1) *Falls für jedes $x \in (a, b)$ $f''(x) > 0$ ist, ist f auf (a, b)* konvex, *d.h. der Graph von f immer oberhalb seiner Tangenten liegt.*
(2) *Falls für jedes $x \in (a, b)$ $f''(x) < 0$ ist, ist f auf (a, b)* konkav, *d.h. liegt der Graph von f immer unterhalb seiner Tangenten.*

IDEE. (1) Da $f''(x) > 0$, ist $f'(x)$ wegen des Satzes 5.36(1) streng monoton wachsend. Daraus folgt, dass die Steigung der Tangente monoton zunimmt, das heisst, die Tangente sich in positivem Sinn dreht.

Der Satz "f liegt immer oberhalb seiner Tangenten" hat die folgenden Bedeutung. Sei $x_0 \in (a, b)$ und sei $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ die Gleichung der Tangente zum Graph von f an der Stelle x_0. Dann ist für jedes $x \in [a, b]$, $f(x) > y(x)$ (und $f(x_0) = y(x_0)$). Wir werden später den Satz als eine Anwendung der Formel des Restglieds beweisen.

DEFINITION 5.40. Sei f eine stetige auf $[a, b]$ und zweimal differenzierbar auf (a, b) Funktion. Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heisst ein *Wendepunkt*, falls $f''(x_0^+)f''(x_0^-) < 0$.

KOROLLAR 5.41. *Sei $x_0 \in (a, b)$ ein kritischer Punkt der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

(1) *Falls $f''(x_0) > 0$, ist x_0 eine lokale Minimalstelle.*
(2) *Falls $f''(x_0) < 0$, ist x_0 eine lokale Maximalstelle.*
(3) *Wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, ist x_0 ein* Wendepunkt.

DEFINITION 5.42. Fall ein Wendepunkt x_0 ein kritischer Punkt ist, heiss x_0 ein *Wendepunkt mit horizontaler Tangente*. Die Wendepunkte, die keine kritische Punkte sind, heissen *Wendepunkte mit schiefer Tangente*.

BEISPIEL 5.43. Alle Polynome des ungeraden Grades > 1 besitzen mindestens einen Wendepunkt. Sei zum Beispiel $p_3(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dann ist $p_3''(x) = 6ax + 2b = 0$ genau dann, wenn $x = -\frac{b}{3a}$. Wir haben auch, dass $\operatorname{sgn}(p_3''(x)) = -\operatorname{sgn}(a)$ für jedes $x < -\frac{b}{3a}$ und $\operatorname{sgn}(p_3''(x)) = \operatorname{sgn}(a)$ für jedes $x > -\frac{b}{3a}$.

BEISPIEL 5.44. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $b_\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$

$$b_\alpha(t) := (1 + t)^\alpha .$$

Wir haben

$$b'_\alpha(t) = \alpha(1 + t)^{\alpha-1} \quad \text{und} \quad b''_\alpha(t) = \alpha(\alpha - 1)(1 + t)^{\alpha-2} .$$

Da $b'_\alpha(0) = \alpha$ und $(0, 1)$ liegt auf dem Graph von f, ist

$$y = 1 + \alpha t$$

die Tangente an der Stelle $t = 0$. Da $t > -1$, ist $1 + t > 0$, sodass

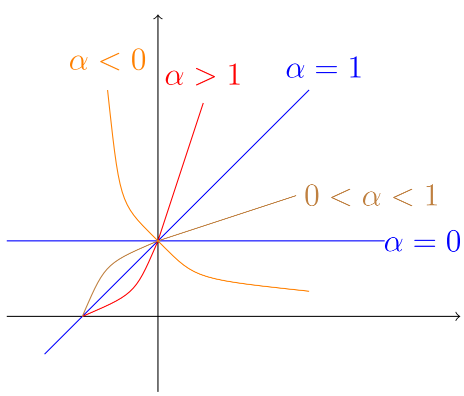
$$\operatorname{sgn}(b''_\alpha(t)) = \operatorname{sgn}(\alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}) = \operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1) = \begin{cases} 1 & \alpha > 1 \text{ oder } \alpha < 0 \\ -1 & 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $b_\alpha(t)$ konvex ist, falls $\alpha > 1$ oder $\alpha < 0$, und $b_\alpha(t)$ ist konkav, falls $0 < \alpha < 1$. (Im Fall $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ist $b_\alpha(t)$ eine Gerade.) Wegen der Definition, könner wir die Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_\alpha(t) &\geq 1 + \alpha t, \quad \text{falls } \alpha \leq 0 \text{ oder } \alpha \geq 1 \\ b_\alpha(t) &\leq 1 + \alpha t, \quad \text{falls } 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

herleiten. Wir haben deshalb die *Bernoullische Ungleichung* bewiesen:

$$\begin{aligned} (1+t)^\alpha &\geq 1 + \alpha t, \quad \text{falls } \alpha \leq 0 \text{ oder } \alpha \geq 1 \\ (1+t)^\alpha &\leq 1 + \alpha t, \quad \text{falls } 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$



Man kann auch die höhere Ableitung benutzen müssen.

Satz 5.45. *Sei x_0 ein kritische Punkt der Funktion f und nehmen wir an, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so, dass*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{ und } \quad f^{(n)}(x_0) =: A \neq 0\,.$$

(1) *Falls n gerade ist, und $A > 0$, besitzt f and der Stelle x_0 ein lokales Minimum.*
(2) *Falls n gerade ist, und $A < 0$, besitzt f and der Stelle x_0 ein lokales Maximum.*
(3) *Falls n ungerade ist, besitzt f and der Stelle x_0 einen Wendepunkt.*

Definition 5.46. Der Punkt x_0 heisst eine Nullstelle der Funktion f mit *Multiplizität n*.

Wir werden den Satz nicht beweisen, aber mit ein Paar Beispiele erklären.

Beispiel 5.47. Sei $f(x) = x^2$ und setzen wir $x_0 = 0$. Dann ist

$$f'(0) = 0, \quad \text{und} \quad f''(0) \neq 0\,.$$

In der Tat sagt der Satz, dass, da $n = 2$ und $f''(0) = 2 > 0$, besitzt f and der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Beispiel 5.48. Sei $f(x) = x^3$ und setzen wir $x_0 = 0$. Dann ist

$$f'(0) = f''(0) = 0, \quad \text{aber} \quad f'''(0) \neq 0\,.$$

in der Tat sagt der Satz, dass, da $n = 3$ ungerade ist, besitzt f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel 5.49. Wir suchen die Extremalstellen der Funktion $f(x) = (x-3)^3(x+2)^2$. Die erste Ableitung lautet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-3)^2(x+2)^2 + 2(x-3)^3(x+2) \\ &= (x-3)^2(x+2)[3(x+2) + 2(x-3)] \\ &= (x-3)^2(x+2)5x\,, \end{aligned}$$

sodass $x = -2, 0, 3$ die kritische Stellen sind. Für die zweite Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5(x-3)^2(x+2) + 10(x-3)(x+2) + 5x(x-3)^2 \\ &= 5(x-3)[(x-3)(x+2) + 2x(x+2) + x(x-3)] \\ &= 10(x-3)(2x^2-3)\,, \end{aligned}$$

woraus

$$f''(-2) = -250, \qquad f''(0) = 90 \qquad f''(3) = 0\,.$$

Um die Art von $x = 3$ zu bestimmen, berechnen jetzt die dritte Ableitung. Wir erhalten

$$f'''(x) = 5(4x^2-6) + 5(x-3)8x = 5(12x^2 - 24x - 6) = 30(2x^2 - 4x - 1)\,,$$

woraus $f'''(3) = 150$. Wir können die Ergebnisse zusammenfassen:

(1) Aus $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -250 < 0$ folgt, dass $x = -2$ eine lokale Maximalstelle ist.
(2) Aus $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 90 > 0$ folgt, dass $x = 0$ eine lokale Minimalstelle ist.
(3) Aus $f'(3) = f''(3) = 0$ und $f'''(3) = 150 > 0$ folgt, dass $x = 3$ ein Wendepunkte mit horizontaler Tangente ist.

Des Weiteren gibt es zwei zusätzlich Punkte, die wichtig sind: sie sind Punkte, wobei $f''(x) = 0$ und die Konvexität der Funktion wächselt.

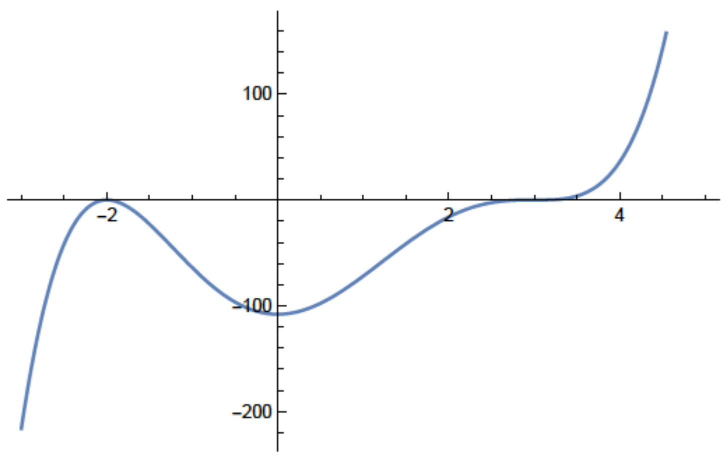
(1) $x = -2$ ist eine Maximalstelle mit lokalem Maximum $f(-2) = 0$.
(2) $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ist ein Wendepunkt mit schiefer Tangente.
(3) $x = 0$ ist eine Minimalstelle mit lokalem Minimum $f(0) = -108$.

(4) $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und $x = 3$ sind Wendepunkte. An der Stelle $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ hat f ein Wendepunkt mit schiefer Tangente und and der Stelle $x = 3$ hat f ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 3$	3	$x > 3$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	s.m.w. konkav	l.Max.	s.m.f. konkav	WP	s.m.f. konvex	l.Min.	s.m.w. konvex	WP	s.m.w. konkav	WP	s.m.w. konvex

```
In[2]:= Plot[(x - 3)^3 (x + 2)^2, {x, -3, 5}]
```

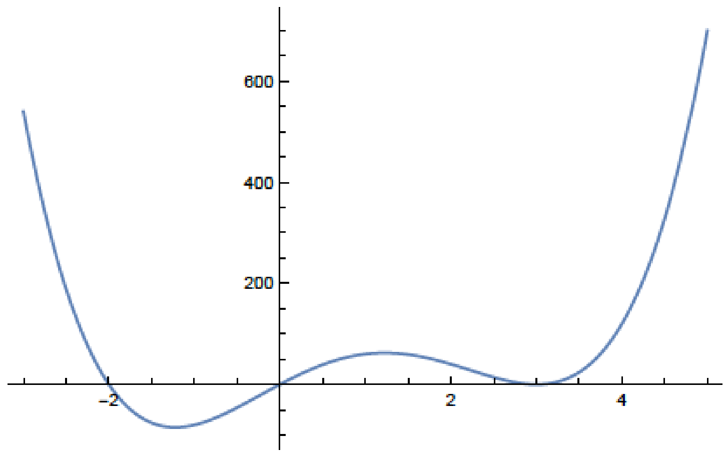
Out[2]=



BEMERKUNG 5.50. Es ist interessant, den Graph von f mit dem Graph von f' zu vergleichen. Das ist nur ein Beispiel, mit $f(x)$ wie im Beispiel 5.49. Dann gilt

```
In[16]:= Plot[(x - 3)^2 (x + 2) 5 x, {x, -3, 5}]
```

Out[16]=



5.8. Taylor-Approximation

Sei f eine (unendlich oft) differenzierbare Funktion und $a \in \mathrm{dom}(f)$ ein Punkt. Wir suchen ein Polynom das "am besten in der Nähe von $(a, f(a))$ den Graph der Funktion approximiert". Das bedeutet, dass das Polynom die gleiche Ableitungen als die Funktion f an der Stelle $x = a$ haben muss.

Beispiel 5.51. Sei $f(x) = e^x$ und sei $a = 0$. Wir suchen ein Polynom $p_n(x)$ des Grades n, dass die gleiche Ableitunge als die Funktion $f(x) : e^x$ im Ursprung hat.

$\boxed{n = 0}$ Das Polynom $p_0(x)$ muss der Bedingung $p_0(0) = f(0) = 1$ genügen. Da $p_0(x)$ eine Konstante ist, muss $p_0(x) \equiv 1$ sein.

$\boxed{n = 1}$ Das Polynom $p_1(x)$ muss die Bedingungen

$$p_1(0) = f(0) = 1 \quad \text{und} \quad p_1'(0) = f'(0) = 1$$

erfüllen. Daraus folgt, dass $p_1(x) = x + 1$, d.h. p_1 ist der Tangente zum Graph von f an der Stelle $x = 0$.

$\boxed{n = 2}$ Das Polynom $p_2(x)$ muss die Bedingungen

$$p_2(0) = f(0) = 1, \quad p_2'(0) = f'(0) = 1 \quad \text{und} \quad p_1''(0) = f''(0) = 1$$

erfüllen. Daraus folgt, dass $p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ das Polynom des Grades 2 ist, das am besten den Graph von f approximiert.

Die Idee ist, Polynome des höheren und hohëren Grades zu benutzen. Wir fangen mit $a = 0$ an. Wir suchen deshalb ein Polynom $p_n(x)$ des Grades n, das die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$p_n(0) = f(0), \quad p_n'(0) = f'(0), \ldots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,.$$

Sei $p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$.

(1) Aus $p_n(0) = f(0)$ folgt, dass $c_0 = f(0)$.

(2) Da
$$p_n'(0) = (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1})\big|_{x=0} = c_1\,,$$
folgt aus $p_n'(0) = f'(0)$, dass $c_1 = f'(0)$.

(3) Da
$$p_n''(0) = (2c_2 + 3\cdot 2c_3x + \cdots + n(n-1)c_nx^{n-2})\big|_{x=0} = 2c_2\,,$$
folgt aus $p_n''(0) = f''(0)$, dass $c_2 = \frac{1}{2}f'(0)$.

(4) ...

(5) Da $k!c_k = f^{(k)}(0)$ und $p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, ist $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Wir haben die Idee des Beweises des folgenden Satzes gezeigt:

Satz 5.52. *Sei f eine an der Stelle $x = 0$ n-Mal differenzierbare Funktion. Es gibt ein eindeutiges Polynom $p_n(x)$ des Grades $\leq n$, das die Bedingungen*
$$p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n$$
erfüllt. Das Polynom ist
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\,,$$
wobei $f^{(0)}(0) := f(0)$, und heisst das Taylor-Polynom von f des Grades n an der Stelle $x = 0$.

Analog ist das Taylor-Polynom von f des Grades n um $x = x_0$
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,.$$

Notation. Falls nötig, benutzen wir die Schreibweise
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =: p_n(f, x_0)(x)\,.$$

Beispiel 5.53. Sei $f(x) = e^x$, sodass $f^{(k)}(x) = e^x$ und $f^{(k)}(0) = 1$ für jedes $k \geq 0$. Daraus folgt, dass
$$p_n(e^x, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Beispiel 5.54. Sei $f(x) = \sin x$, sodass $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x\,, \ldots$. Daraus folgt, dass $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ und $f^{(2k)}(0) = 0$ und deshalb verschwinden die Koeffizienten des geraden Grades des Taylor-Polynoms von $\sin x$. In der Tat ist
$$p_{2n+1}(\sin x, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{k!}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\,.$$

5.8.1. Rechnen mit den Taylor-Polynomen. Die Taylor-Polynome genügen die folgende Eigenschaften:

(1) $p_n(\alpha f, \beta g, x_0)(x) = \alpha p_n(f, x_0)(x) + \beta p_n(g, x_0)(x)$, für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
(2) $(p_n(f, x_0))'(x) = p_{n-1}(f', x_0)(x)$;

5.8.2. Qualität der Approximation. Es ist sehr wichtig zu wissen, wie gut $p_n(f, x_0)$ die Funktion f in der Umgebung von x_0 approximiert.

Definition 5.55. Das *n-te Restglied* (oder der *Abbruchfehler*) der Approximation von f durch den n-ten Taylor-Polynom ist

$$R_n(f, x_0)(x) := f(x) - p_n(f, x_0)(x)\,.$$

Es gibt verschiedene Darstellungen des Restglieds. Wir werden eine Darstellung betrachten, die mithilfe des Mittelwertsatzes erhalten werden kann.

Satz 5.56. *Es gibt ein $\xi \in (x_0, x)$ mit*

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,.$$

Das ist äquivalent zu sagen, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,.$$

Beweis. Wir werden nur den Fall $f^{(k)}(x_0) = 0$ für jedes $0 \leq k \leq n$ betrachten, sodass

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,. \tag{5.4}$$

zu beweisen ist. Wir führen einen Induktionsbeweis.

Wegen des Mittelwertsatzes auf dem Intervall $[x_0, x]$ gibt es ein $\xi \in (x_0, x)$ so, dass

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)\,.$$

Da wir $f(x_0) = 0$ angenommen haben, erhalten wir

$$f(x) = f'(\xi)(x - x_0)\,,$$

die die Formel in (5.4) für $n = 0$ ist.

Mithilfe von unserer Annahme

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

werden wir jetzt

$$f(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2}$$

beweisen, wobei f eine Funktion ist, deren Ableitungen bis zur Ordnung $n+1$ an der Stelle x_0 verschwinden, $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n+1$.

Sei $g(x) := (x-x_0)^{n+2}$. Da $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x) = (n+2)(x-x_0)^{n+1}$, gibt es wegen des Satzes 5.35 ein $\xi_1 \in (x_0, x)$ so, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)}{(n+2)(\xi_1 - x_0)^{n+1}}\,. \tag{5.5}$$

Da $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n+1$, können wir den Induktionsschritt für die Funktion f' auf dem Intervall $[x_0, \xi_1]$ anwenden. Daraus folgt, dass es ein $\xi \in (x_0, \xi_1)$ gibt so, dass

$$f'(\xi_1) = \frac{(f')^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi_1 - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}(\xi_1 - x_0)^{n+1}$$

Wir können diese Gleichung in (5.5) ersetzen, um

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(\xi_1)}{(n+2)(\xi_1 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(n+2)\cancel{(\xi_1 - x_0)^{n+1}}} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!} \cancel{(\xi_1 - x_0)^{n+1}} \\ &= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\,. \end{aligned}$$

zu erhalten. Daraus folgt, dass

$$f(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} g(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x - x_0)^{n+2}\,,$$

die zu beweisen war. □

Anwendung. Wir beweisen den Satz 5.39 mit $f''(x) > 0$. Und zwar zeigen wir, dass der Graph einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall (a,b) oberhalb seiner Tangente liegt. Nehmen wir an, dass $f''(x)$ für jedes $x \in [a,b]$ positiv ist und dass $x_0 \in (a,b)$. Der Gleichung der Tangente zum Graph von f an der Stelle $x = x_0$ lautet

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Nach dem Satz 5.56 gibt es ein $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2\,.$$

Daraus folgt, dass

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 > 0\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass $f''(x) > 0$ für jedes $x \in I$ ist.

Beispiel 5.57. Wir möchten $\log 1.2$ mit einem Fehler kleiner als $4 \cdot 10^{-4}$ berechnen. Wir betrachten das Taylor-Polynom an der Stelle $x_0 = 1$, das heisst

$$\begin{aligned} \log x &= p_n(\log x, 1)(x) + R_n(\log x, 1)(x) \\ &= p_n(\log x, 1)(x) + \frac{f^{(n+1)}}{(}\xi)(n+1)!(x-1)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

wobei $\xi \in (1, 1.2)$ ist. Der Wert von $\log 1.2$ ist durch

$$\log 1.2 \sim p_n(\log x, 1)(1.2)$$

berechnet, und wir müssen n finden so, dass

$$|R_n(\log x, 1)(1.2)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \right| \leq 4 \cdot 10^{-4}\,.$$

Das Problem ist, dass wir $\xi \in (1, 1.2)$ nicht finden können. Wir wissen aber, dass

$$(\log x)^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

und dann ist

$$x \mapsto \left|(\log x)^{(n+1)}\right| = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

auf $(1, 1.2)$ streng monoton fallend. Daraus folgt, dass

$$\left|(\log x)^{(n+1)}(\xi)\right| \leq n!\,,$$

für jedes $\xi \in (1, 1.2)$. Wir erhalten deshalb

$$\begin{aligned} |R_n(\log x, 1)(1.2)| = &\left| \frac{(\log x)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(1.2-1)^{n+1} \right| \\ \leq &\frac{n!}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \\ = &\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Es ist einfach zu sehen, dass

$$\begin{aligned} |R_0| &\leq 0.2 \\ |R_1| &\leq 0.02 \\ |R_2| &\leq 0.0027 \\ |R_3| &\leq 0.0004 = 4 \cdot 10^{-4}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\log 1.2 \cong p_3(\log x, 1)(1.2) = 0 + 1 \cdot 0.2 + \frac{-1}{2!}(0.2)^2 + \frac{2}{3!}(0.2)^3 = 0.18267$$

den gesuchten Wert gibt.

5.8.3. Anwendung des Taylor-Polynoms: das Newton-Verfahren. Wir suchen eine approximative Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Sei x_0 ein Näherungswert einer Nullstelle von $f(x)$. Wir approximieren den Graph von f mit dem Graph der Tangente an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ und wir nennen x_1 den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse. Die Gleichung der Tangente an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und ihrer Schnittpunkt x_1 mit der x-Achse kann aus der Gleichung

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

gefunden werden. Daraus folgt, dass

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,.$$

Wir wiederholen diesen Prozess iterativ und definieren eine rekursive Folge $(x_n)_{n\geq 0}$, wobei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,. \tag{5.6}$$

Wir müssen aber sicher sein, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen die Nullstelle ξ konvergiert.

Satz 5.58. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) zweimal differenzierbare Funktion. Nehmen wir an, dass:*

(1) *$f(a)f(b) < 0$;*
(2) *$f'(x) \neq 0$ and $f''(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$.*

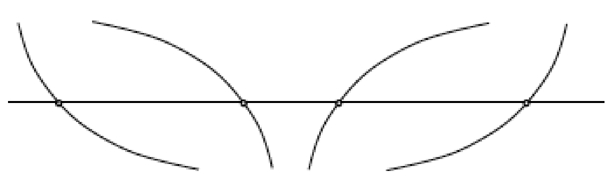
Sei

$$x_0 := \begin{cases} a & f'(x)f''(x) < 0 \\ b & f'(x)f''(x) > 0\,. \end{cases}$$

Dann ist die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in (5.6) monoton und konvergiert gegen eine Nullstelle der Funktion $f(x)$.

Was ist die Bedeutung der Bedingung $f'(x)f''(x) > 0$? Es gibt verschiedene Formen des Graphes von f. Von Links nach Rechts im folgenden Bild sind:

(1) $f' < 0$ und $f'' > 0$;
(2) $f' < 0$ und $f'' < 0$;
(3) $f' > 0$ und $f'' < 0$;
(4) $f' > 0$ und $f'' > 0$.



Unten diese Annahmen ist die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergent.

Beweis. Wir werden zeigen, dass, falls $f' > 0$ und $f'' > 0$ und falls wir $x_0 := b$ setzen, ist

$$\xi \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_0 \,.$$

Wir werden prüfen, ob $\xi \leq x_1 < x_0$: der allgemeinen Fall ist ganz ähnlich.

Da $f'(x) > 0$ auf (a, b) ist, ist f streng monoton wachsend. Aus $f(a)f(b) < 0$ und $x_0 = b$ folgt, dass $f(x_0) > 0$ und deshalb ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 \,.$$

Um die Ungleichung $\xi < x_1$ zu zeigen, entwickeln wir f an der Stelle x_0 nach Taylor. Wegen des Satzes 5.56 gibt es $\tau \in (\xi, x_0)$ mit

$$0 = f(\xi) = p_1(f, x_0)(\xi) + R_1(f, x_0)(\xi) = f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0) + \frac{1}{2} f''(\tau)(\xi - x_0)^2 \,.$$

Daraus folgt, dass

$$0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + (\xi - x_0) + \frac{1}{2}\frac{f''(\tau)}{f'(x_0)}(\xi - x_0)^2$$

und zwar

$$x_1 - \xi = \left[x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right] - \xi = +\frac{1}{2}\frac{f''(\tau)}{f'(x_0)}(\xi - x_0)^2 \,.$$

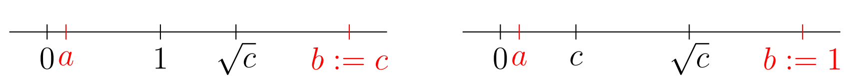
Da für jedes $x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$ and $f''(x) > 0$, ist der linke Seite > 0 und deshalb $x_1 > \xi$.

Wir haben geprüft, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ streng monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Aus dem Satz 4.100 konvergiert die Folge nach α als $n \to \infty$. Aber aus der Definition in (5.6) folgt, dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \,.$$

□

Beispiel 5.59. Wir wenden das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^2 - c$ an.Wir müssen ein Intervall $[a, b]$ finden, wo die Annahmen im Satz 5.58 erfüllt sind. Da für jedes $x > 0$ $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$ sind, suchen wir $[a, b] \in (0, \infty)$, wobei $f(a)f(b) < 0$. Falls $a > 0$ sehr klein ist, ist $f(a) < 0$. Falls $c > 1$, ist $1 < \sqrt{c} < c$, sodass wir $b := c$ setzen und $f(b) = f(c) > 0$. Im Fall $c < 1$, ist $c < \sqrt{c} < 1$, sodass wir $b := 1$ setzen und noch einmal ist $f(b) = f(1) = 1 - c > 0$



Wir setzen auch $x_0 := c$. Wegen des Newton-Verfahrens ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \lim_{n\to\infty} x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) = \sqrt{c}\,,$$

das wir schon im Beispiel 4.104 bewiesen hatten.

5.8.4. Die Taylor-Reihe als Potenzreihe. Falls f in einer Umgebung von x_0 unendlich oft differenzierbar ist, können wir die Taylor-Reihe von f

$$p_\infty(f, x_0)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

betrachten. Es stellt sich aber die Frage, ob die Taylor-Reihe in einer Umgebung von x_0 die Funktion f darstellt, dass heisst, ob es in einer Umgebung von x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

gilt. Um diese Frage zu antworten, müssen wir untersuchen, ob das Restglied $R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ für ein $\xi \in (x_0, x)$ gegen 0 geht als $n \to \infty$. Im allgemeinen ist in der Tat $\lim_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0$, es gibt aber Gegenbeispiele.

Beispiel 5.60. Sei

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Man kann einfach prüfen, dass

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

und ein ähnlicher Beweis für die höheren Ableitungn zeigt, dass

$$f^{(n)}(0) = 0\,.$$

Daraus folgt, dass $p_\infty(f, 0)(x) \equiv 0$!

□

Der folgenden Satz gilt aber immer.

Satz 5.61. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine durch eine Potenzreihe definiert Funktion,*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\,,$$

für $x_0 \in (a, b)$. Dann ist diese Reihe die Taylor-Reihe von f, d.h

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

BEWEIS. Wir laiten f ab und erhalten

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow f'(x_0) = c_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-x_0)^{n-2} \Rightarrow f''(x_0) = 2c_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(x-x_0)^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = k!c_k\,.$$

□

5.9. Differentialgleichungen, I

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung, die eine unbekannte Funktion und ihre Ableitungen (und vielleicht noch andere unabhängige Funktionen) enthält. Die Unbekannte in einer Differentialgleichung ist eine Funktion, d.h. wir eine Funktion suchen, die identisch der Gleichung genügt.

BEISPIEL 5.62. Die Gleichung

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y > 0\,. \tag{5.7}$$

ist eine Differentialgleichung, weil sie die unbekannte Funktion $y(t)$ und ihre erste Ableitung enthält. Die Funktion $y(t) := \sqrt{c^2 - t^2}$ ist eine *Lösung*, das heisst

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{c^2-t^2}}(-2t) = \frac{-t}{\sqrt{c^2-t^2}} = -\frac{t}{y}\,. \quad \square$$

Die sogenannte *ordentliche Differentialgleichungen* haben normalerweise die Zeit als unabhängige Variable und sind oft ein mathematisches Modell, das ein physikalisches System beschreibt.

Wie könner wir zu einer Differentialgleichung kommen?

BEISPIEL 5.63. Eine radioaktive Substanz X wird durch Zerfall ihrer Atome zur einen anderen Substanz Y abgebaut. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom in dem Intervall $[t, t+\Delta t]$ zerfällt, proportional zu Δt ist

$$P\{\text{Zerfall in } [t, \Delta t]\} = \lambda\Delta t \quad \lambda > 0\,.$$

Da die Atome unabhängig voneinander und von ihrer Vorgeschichte zerfallen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der $N(t)$ zur Zeit t noch lebenden Atome in dem Intervall $[t, t+\Delta t]$ zerfallen, gleich

$$N(t)\cdot P\{\text{Zerfall in } [t, \Delta t]\} = \lambda N(t)\Delta t\,.$$

Daraus folgt, dass

$$N(t+\Delta t) - N(t) = -\lambda N(t)\Delta(t)\,.$$

Falls m_X die Masse eines Atoms der Substanz X ist, können wir schreiben, dass $x(t) = N(t)m_X$ die Totalmasse der Substanz X an der Zeit t ist. Daraus folgt, dass

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -\lambda x(t)\Delta t\,,$$

sodass

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\lambda x(t)\,.$$

Eine Lösung ist die Funktion

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\,,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. In der Tat ist

$$x'(t) = -\lambda C e^{-\lambda t} = -\lambda x(t)\,.$$

Um eine eindeutige Funktion zu bestimmen, müssen wir eine *Anfangsbedingung* geben, d.h. müssen wir den Wert der Funktion zum Beispiel am Anfang unserer Beobachtung geben. Falls $x(0) = x_0$, ist

$$x_0 = x(0) = Ce^0 = C\,.$$

Daraus folgt, dass

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$$

die eindeutige Lösung des *Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} x' = -\lambda x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ist.

Man kann auch sagen, dass die Substanz X zur Substanz Y, und die Substanz Y zur einen anderen Substanz Z abgebaut werden. Die Substanz X erfüllt die Gleichung $x' = -\lambda x$ und es ist einfach zu sehen, dass die Substanz Y die Gleichung $y' = \lambda x - \mu y$ erfüllt. Nehmen wir an, dass Y langsamer als X zerfällt, d.h. $\mu < \lambda$, und dass $y(0) = y_0$. Dann müssen wir das System

$$\begin{cases} x' = -\lambda x \\ y' = \lambda x - \mu y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit $\mu < \lambda$ lösen. Wir haben schon $x(t)$ gefunden und machen wir jetzt den Ansatz, dass

$$y(t) = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}$$

die Lösung ist, wobei A und B zu bestimmen sind. Wir leiten $y(t)$ ab

$$y'(t) = -\lambda A e^{-\lambda t} - \mu B e^{-\mu t}$$

und wir ersetzen das Ergebnis in der Differentialgleichung für y:

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\lambda A e^{-\lambda t} - \cancel{\mu B e^{-\mu t}}}_{y'(t)} &= \lambda \underbrace{x_0 e^{-\lambda t}}_{x(t)} - \mu(\underbrace{A e^{-\lambda t} + \cancel{B e^{-\mu t}}}_{y(t)}) \\
\Rightarrow ((\mu - \lambda)A - \lambda x_0)e^{-\lambda t} &= 0 \quad \text{für jedes } t \geq 0 \\
\Rightarrow ((\mu - \lambda)A - \lambda x_0) &= 0 \\
\Rightarrow A &= \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda}\,.
\end{aligned}$$

Um B zu finden, benutzen wir, dass $y(0) = y_0$, d.h.

$$\begin{aligned}
y_0 &= Ae^0 + Be^0 = A + B \\
\Rightarrow B &= y_0 - A = y_0 - \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda} e^{-\lambda t} + \left(y_0 - \frac{\lambda x_0}{\mu - \lambda}\right) e^{-\mu t}\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 5.64. Wir betrachten einen Massenpunkt, der auf einem Feder angehängt ist und wir bezeichnen u den Ausschlag von der Ruheposition.

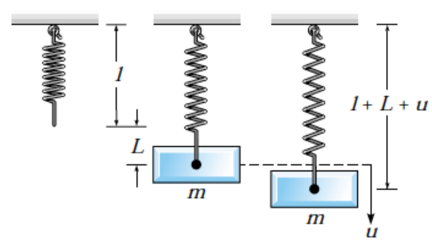


FIGURE 3.8.1 A spring–mass system.

In jedem Moment wirken auf den Massenpunkt drei Kräfte:

(1) eine zum Ausschlag u proportionale Rückstellkraft ku, wobei k eine vom Feder abhängige Konstant ist;
(2) die Dämpfung, die zur Momentangeschwindigkeit proportional ist, $\gamma u'$;
(3) eine aussere Anregung $F(t)$, die $\equiv 0$ sein kann.

Wegen des Newtons ersten Gesetzes ist

$$mu'' = -ku - \gamma u' + F(t)\,,$$

d.h.

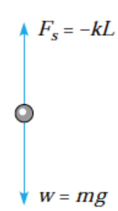


FIGURE 3.8.2 Force diagram for a spring–mass system.

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t)\,. \tag{5.8}$$

Die Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung *zweiter Ordnung* mit konstante Koeffizienten; sie ist *homogen*, falls $F(t) = 0$. Wir werden eine Methode anzeigen, um die homogene Differentialgleichungen zu lösen. Wir machen den Ansatz, dass $u(t) = e^{\lambda t}$ ist, wobei λ eine zu bestimmende Konstante ist. Die Ableitungen von

$u(t) = e^{\lambda t}$ lauten

$$u' = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{and} \quad u'' = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Wir setzen diese Ableitungenen in (5.8)

$$\begin{aligned} m\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0 \\ \Rightarrow (m\lambda^2 + \gamma\lambda + k)e^{\lambda t} = 0 \end{aligned}$$

und erhalten die sogenannte *charakteristische Gleichung*

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0,$$

wobei

$$\mathrm{chp}(\lambda) := m\lambda^2 + \gamma\lambda + k$$

das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung $mu' + k = 0$ heisst. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} \qquad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}.$$

Nehmen wir an, dass $\gamma^2 - 4km > 0$ so, dass $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Dann sind

$$u_1 = e^{\lambda_1 t} \quad \text{and} \quad u_2 = e^{\lambda_2 t}$$

Lösungen. Da die Differentialgleichung linear und homogen ist, ist die Linearkombination

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

für jedes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ auch eine Lösung. In der Tat berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ u''(t) &= c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

die wir in der zu (5.8) erspechenden homogenen Differentialgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} & mu'' + \gamma u' + ku \\ =& m(c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + \gamma(c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + k(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) \\ =& c_1(m\lambda_1^1 + \gamma\lambda_1 + k)e^{\lambda_1 t} + c_2(m\lambda_2^2 + \gamma\lambda_2 + k)e^{\lambda_2 t} = 0. \end{aligned}$$

Falls die Anfangsbedingungen gegeben sind, können wir auch die Konstante c_1 und c_2 bestimmen.

$$\begin{cases} u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \quad c_1 + c_2 = u_0 \\ \quad c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = u_0 - c_2 \\ (u_0 - c_2)\lambda_1 + c_2\lambda_2 = v_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{\lambda_1 u_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ c_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 u_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

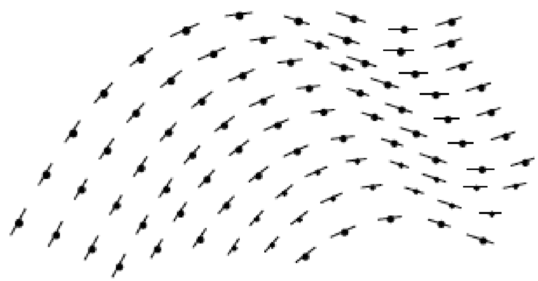
Wir werden später sehen, dass diese Methode einen speziellen Fall einer allgemeinen Methode ist, um die lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstante Koeffizienten zu lösen.

5.9.1. Allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung. Wir können auch geometrisch argumentieren, und den Begriff von "Lösungskurve" in der (x, y)-Ebene betrachten.

Eine allgemeine (d.h. nicht unbedingt lineare) Differentialgleichung erster Ordnung hat die folgende Form

$$y' = f(x, y)\,,$$

wobei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei variable auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. Ohne die Differentialgleichung zu lösen, sehen wir, dass die Differentialgleichung ein Kurvenfamilie definiert, mit der Eigenschaft, dass die Steigung der Lösung $y(x)$ auf jedem Punkt (x, y) gleich $f(x, y)$ ist. Das heisst, dass $y' = f(x, y)$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ einen *Richtungsfeld* definiert. Gesucht sind diejenigen Kurven in Ω, sie sich in jedem einzelnen Kurvenpunkt die dort gegebene Richtung haben.



Der folgenden Satz gilt:

SATZ 5.65. *Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine "gute" Funktion. Die Lösungen von $y' = f(x, y)$ bilden eine einparametrige Funktionfamilie y_c. Durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ geht genau eine Lösungskurve. Das ist äquivalent zu sagen, dass das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.9}$$

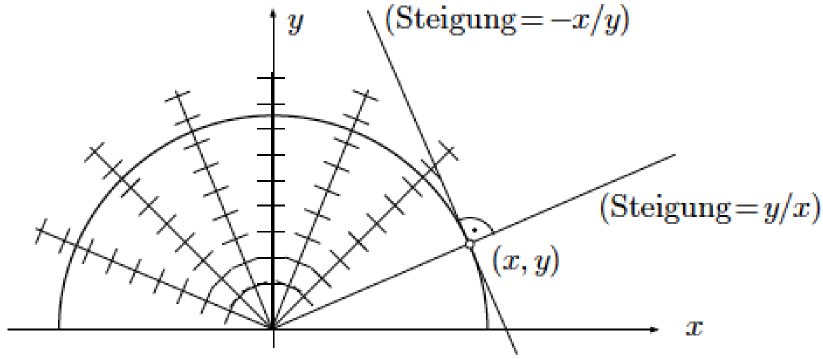
eine eindeutige Lösung auf einem Intervall $I \ni x_0$ besitzt. Das Intervall I hängt vom (x_0, y_0) ab.

BEISPIEL 5.66. Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung in (5.7),

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y > 0\,.$$

Die Tangente zur Kurve $y(x)$ auf dem Punkt $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ besitzt die Steigung $-x_0/y_0$. Die Steigung einer Gerade durch (x_0, y_0) und senkrecht zur diesen

Tangente ist y_0/x_0 und sie geht durch $(0,0)$. Die Lösungskurven sind offenbar Halbkreisbögen um Ursprung, uns zwar geht durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathrm{dom}(f)$ genau ein derartiger Bogen.



In der Tat ist die Lösung $y_c(x) = \sqrt{c^2 - x^2}$ für $c > 0$, weil für $-c < x < c$

$$y_c'(x) = \frac{1}{2}(c^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

und

$$\frac{1}{2}(c^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{(c^2 - x^2)^{1/2}} = -\frac{x}{y}\,.$$

$\square$

5.9.2. Ein numerisches Verfahren. Als eine Anwendung des Richtungsfelds einer Differentialgleichung sehen wir jetzt ein numerisches Verfahren. Nehmen wir an, dass wir die Lösung des Anfangswertproblems in (5.9) finden möchten.

Wir wählen zuerst eine Schrittweite $h > 0$. Das heisst, dass wir Näherungswerte y_k der Lösung an der Stelle $x_k = x_0 + kh$ finden werden. Wir wissen den Wert $y(x_0) = y_0$ und setzen den Näherungswert y_1 von $y(x_1)$ gleich

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h\,.$$

Der Fehler $|y_1 - y(x_1)|$ ist in diesem Schritt nur wegen die Nutzung der Tangente statt der unbekannte Funktion.

Wir gehen weiter und schreiben

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h\,.$$

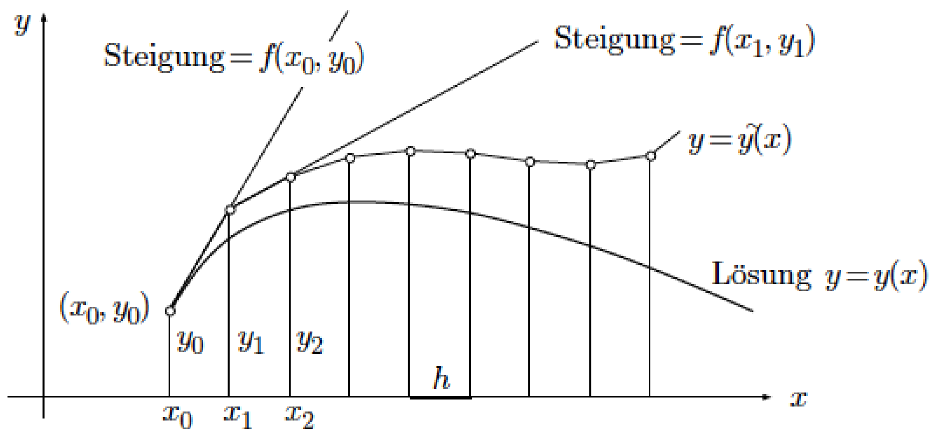
Der Fehler $|y_2 - y(x_2)|$ entsteht jetzt aus drei Gründe:

(1) Wir fangen bei (x_1, y_1) und nicht bei $(x_1, y(x_1))$ an;
(2) Wir nutzen die Tangente statt der Funktion;
(3) Wir berechnen die Steigung am Punkt (x_1, y_1) und nicht am Punkt $(x_1, y(x_1))$ (den wir nicht kennen).

Die allgemeine Formel für y_{k+1} ist

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h\,.$$

Diese Methode heisst *das Polynomverfahren.* Der Fehler $|y_k - y(x_k)|$ ist um so kleiner, je kleiner die Schrittweite h ist und wächst exponentiell mit der Distanz des Punktes x_k von x_0.



Beispiel 5.67. Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$y' = -x/y \quad y(0) = 1$$

und wir möchten mit dem Polynom-Verfahren und zwei verschiedenen Werte von h den Wert $y(1/2)$ finden.

Wir nehmen zuerst die Schrittweite $h = 1/16$.

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0 && y_0 = 1\\
&x_1 = \tfrac{1}{16} && y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\tfrac{1}{16} = 1 - \tfrac{0}{1}\tfrac{1}{16} = 1\\
&x_2 = \tfrac{2}{16} && y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\tfrac{1}{16} = 1 - \tfrac{1/16}{1}\tfrac{1}{16} = 0.9961\\
&x_3 = \tfrac{3}{16} && y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\tfrac{1}{16} = 1 - \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{2/16}{1-\frac{1}{16^2}}\tfrac{1}{16} = 0.9883\\
&\vdots\\
&x_8 = \tfrac{8}{16} && y_9 = 0.8852\,.
\end{aligned}$$

Falls $h = 1/256$, würde $1/2 = x_{128}$ und $y_{128} = 0.86726$.

In diesem Fall wissen wir schon die Lösung der Differentialgleichung, d.h. $y = \sqrt{1 - x^2}$. Daraus folgt, dass $y(1/2) = 0.8660$ der Wert der Lösung an der Stelle $x = 1/2$ ist. Wie erwartet ist der Näherungswert mit der kleineren Schrittweite (und mit viel grösser Aufwand) viel besser.

5.9.3. Homogene lineare Differentialgleichungen.

Definition 5.68. (1) Ein Polynom $p_1(x)$ in einer Variable x heisst *linear*, falls $p_1(x) = ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ist.

(2) Ein Polynom $p_1(x_1,\dots,x_n)$ in n Variablen $x_1,\dots,x_n$ heisst *linear*, falls
$$p_1(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots,a_nx_n+b$$
für $a_1,\dots,a_n,b\in\mathbb{R}$ ist.
(3) Eine Differentialgleichung heisst *linear*, falls sie ein lineares Polynom der Variablen $y,y',\dots,y^{(n)}$ ist.
(4) Eine Differentialgleichung heisst *homogen*, falls jeder Term in der Differentialgleichung die unbekannte Funktion oder ihre Ableitungen enthält.

Die Differentialgleichung
$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$$
ist eine homogene lineare Differentialgleichung. Falls $a_j\in\mathbb{R}$ für $j=0,1,\dots,n$ sagen wir, dass die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat.

Wir betrachten Funktionen, die unendlich oft (or "genüg") differenzierbar sind und wir nennen den Raum dieser Funktionen $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Wir möchten die Ableitung einer Funktion $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ als einen Operator
$$\frac{d}{dx}:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$
betrachten. Anders gesagt, ist der Operator $\frac{d}{dx}$ die lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, die eine Funktion $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nimmt und die Funktion Ableitung zurückgibt.

Falls $D:=\frac{d}{dx}$ und $y=y(x)$, ist $Dy=y'$. Der Differentialoperator D genügt den folgenden Eigenschaften (d.h. D is "linear"):
(1) $D(f+g)=D(f)+D(g)$ für jede $f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$;
(2) $D(\alpha f)=\alpha D(f)$ für jede $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Beispiel 5.69. Desweiteren ist $D^2y=D(Dy)=Dy'=y''$ und $D^ny=y^{(n)}$. Die zweite Ableitung oder die n-te Ableitung sind auch Differentialoperatoren. In der Tat ist die Summe zwei Differentialoperatoren auch ein Differentialoperator.

Falls A,B zwei lineare Operatoren sind, ist die Summe $A+B$ für jede $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ so definiert:
(1) $(A+B)(f):=Af+Bf$;
(2) $(\alpha A)(f):=\alpha A(f)$, für $\alpha\in\mathbb{R}$;
(3) $(AB)(f):=A(Bf)$.

Wir können deshalb schreiben:
$$\begin{aligned}&y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\dots+a_1y'+a_0y\\&=D^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+\dots+a_1Dy+a_0y\\&=(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1D+a_0)y=Ly\,,\end{aligned}$$
wobei
$$L:=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1D+a_0\,,$$

sodass die Differentialgleichung

$$Ly = 0 \tag{5.10}$$

lauten wird.

BEMERKUNG 5.70. Der Ausdruck $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1y'+a_0y$ ist die Summe der Funktion y und ihre Ableitungen; der Ausdruck $(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)y$ bezeichnet den Differentialoperator $L = D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0$ an der Funktion y angewendet. Die sind gleich, ist die Interpretation aber, die ein bisschen verschieden ist.

Wir suchen jetzt das zur (5.10) entsprechenden charakteristische Polynom. Wir machen deshalb den Ansatz, dass $y(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung von (5.10) ist. Da

$$D^k(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t},$$

gilt

$$\begin{aligned} 0 &= Ly \\ &= D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y \\ &= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Da $e^{\lambda t} \neq 0$ ist, muss

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

unbedingt gelten. Die Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_a\lambda + a_0 = 0$$

heisst die *charakteristische Gleichung* von $Ly = 0$ und

$$\operatorname{chp}(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

heisst das *charackteristischen Polynom* von L.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind wichtig für die Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$. In der Tat kann man aus unseren Diskussion das Folgenden herleiten: falls λ_0 eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, folgt aus (5.11) dass, $y(t) = e^{\lambda_0}$ eine Lösung von (5.10) ist.

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung heissen die *Eigenwerte* des Operators L und

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} =: \operatorname{Spec} L$$

ist *das Spektrum* des Operators $L = \operatorname{chp}(D)$.

Die Frage ist jetzt, wie man die verschiedenen Lösungen von (5.10) zusammensetzen kann, um die allgemeine Lösung von (5.10) zu finden.

SATZ 5.71. *Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Differentialgleichung* (5.10) *ist ein n-dimensionaler Vektorraum, d.h.:*

(1) *(Superposizionsprinzip) Falls $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ist $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{L}$.*
(2) *Es gibt Basen von n linear unabhängigen Lösungen $y_1, \dots, y_n$ so, dass jede Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$ als eine lineare Kombination*

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n$$

mit beliebigen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

Die Aussage (1) ist das Superpositionsprinzip. Das zeigt, dass jede lineare Kombination von Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung noch eine Lösung ist.

5.9.3.1. *Nullstellen von Polynomen und deren Multiplizität.*

Satz 5.72. *Sei $p_n(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ ein Polynom des Grades n.*
(1) *Es gibt immer eine komplexe Nullstellen.*
(2) *Falls die Koeffizienten a_j reelle Zahlen sind and falls $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ eine Nullstelle ist, ist auch $\overline{\lambda_0} = \mu_0 - i\nu_0$ eine Nullstelle.*

Beispiel 5.73. Sei $p_2(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ ein Polynom des Grades 2. Dann können die Nullstelle mit der bekannten Formel

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gefunden werden. Es gibt drei Möglichkeiten:
(1) $b^2 - 4ac > 0$: Dann gilt

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \neq \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

(2) $b^2 - 4ac = 0$: Dann gilt

$$\lambda_1 = \frac{-b}{2a} = \lambda_2\,.$$

(3) $b^2 - 4ac < 0$: Dann gilt

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \overline{\frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}} = \overline{\lambda_2}\,.$$

Für ein allgemeines Polynom $p_n(\lambda)$ des Grades n haben wir auch drei Möglichkeiten:
(1) Alle Lösungen sind reelle und verschieden:

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)\,,$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
(2) Es gibt Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.
(3) Es gibt Lösungen mit Multiplizität ≥ 2.

Beispiel 5.74.

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k(\lambda - \lambda_{k+1})\dots(\lambda - \lambda_n)\,.$$

Wir haben in Definition 5.46 die Multiplizität einer Nullstelle definiert. Falls ein Polynom $p_n(\lambda)$ an der Stelle λ_0 ein Nullstelle der Multiplizität k, $k \leq n$, besitzt, kann das Polynom als

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k p_{n-k}(\lambda) \quad \text{mit } p_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$$

faktorisiert.

5.9.3.2. *Reelle und einfache Eigenwerte.* Das ist der einfachster Fall. Die Eigenwerte sind alle reelle und $\lambda_i \neq \lambda_j$ falls $j \neq j$. In diesem Fall sind die Funktionen $y_k(t) = e^{\lambda_k t}$ linear unabhängige Lösungen von $Ly = 0$. Jede andere Lösung wird

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_k y_k(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_k e^{\lambda_k t}$$

für beliebige Koeffizienten sein.

5.9.3.3. *Komplexe Eigenwerte.* Da das charakteristische Polynom $\operatorname{chp}(\lambda)$ reelle Koeffizienten hat, falls $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ ein Eigenwert ist, ist $\overline{\lambda_0} = \mu_0 - i\nu_0$ auch ein Eigenwert. Daraus folgt, dass jede lineare Kombination $y(t) = \gamma e^{\lambda_0 t} + \delta e^{\overline{\lambda_0} t}$ erhalten wird. Die Koeffizienten γ und δ sind beliebige komplexe Zahlen mit der einzige Eigenschaft, dass die lineare Kombination $\gamma e^{\lambda_0 t} + \delta e^{\overline{\lambda_0} t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ reel sein muss. Daraus folgt, dass γ und δ nicht nur komplexe Zahlen sein dürfen, sonder auch sein müssen. Wir könner aber die lineare Kombination umformen, um reelle Koeffizienten und reelle Funktionen zu finden:

$$\begin{aligned}
&\gamma e^{\lambda_0 t} + \delta e^{\overline{\lambda_0} t} \\
=&\gamma e^{\mu_0 t}(\cos \nu_0 t + i \sin \nu_0 t) + \delta e^{\mu_0 t}(\cos \nu_0 t - i \sin \nu_0 t) \\
=&(\gamma + \delta) e^{\mu_0 t} \cos \nu_0 t + i(\gamma - \delta) e^{\mu_0 t} \sin \nu_0 t \\
=&a e^{\mu_0 t} \cos \nu_0 t + b e^{\mu_0 t} \sin \nu_0 t
\end{aligned}$$

sodass der zu λ_0 und $\overline{\lambda_0}$ entsprechenden Teil von $y(t)$ als eine lineare Kombination mit reelleen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.

Anders gesagt, falls wir einen komplexen Eigenwert $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ gefunden habe, haben wir zwei Nullstellen der charakteristischen Gleichung. Die entsprechenden zwei linear unabhängige Lösungen können als

$$y_1(t) = e^{\mu_0 t} \cos(\nu_0 t) \quad \text{und} \quad y_1(t) = e^{\mu_0 t} \sin(\nu_0 t)$$

geschrieben werden.

Beispiel 5.75. Wir betrachten die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung, $x'' + \omega^2 x = 0$, wobei $\omega > 0$ eine Konstante ist. Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ und ihre zwei Lösungen sind $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$. Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten a und b werden mithilfe der Anfangsbedingungen bestimmen werden.

5.9.3.4. *Mehrfache Eigenwerte.* Nehmen wir an, als ein Beispiel, dass $L = D^n$: anders gesagt, ist $D^n y = 0$ die Differentialgleichung und $\lambda^n = 0$ ist die charakteristische Gleichung. Die Nullstelle $\lambda = 0$ hat Multiplizität n und die n Lösungen von $D^n y = 0$ sind die n Polynome

$$y_k(t) = c_k t^k ,$$

wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $0 \leq k \leq n-1$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $D^n y = y^{(n)} = 0$ ist dann

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1} .$$

Im allgemeinen nehmen wir an, dass λ_0 eine m-fache Nullstelle von $\mathrm{chp}(\lambda) = 0$ ist. Daraus folgt, dass

$$\mathrm{chp}(\lambda) = \tilde{p}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m ,$$

wobei $\tilde{p}(\lambda)$ ein Polynom des Grades $n - m$ ist. Wir machen den Ansatz

$$y(t) = q(t)e^{\lambda_0 t} , \text{ wobei } q(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1} t^{m-1} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(D - \lambda_0)y =&(D - \lambda_0)(q(t)e^{\lambda_0 t})\\ =&D(q(t)e^{\lambda_0 t}) - \lambda_0 q(t)e^{\lambda_0 t}\\ =&\lambda_0 q(t)e^{\lambda_0 t} + q'(t)e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 q(t)e^{\lambda_0 t}\\ =&q'(t)e^{\lambda_0 t} .\end{aligned}$$

Gleichermassen ist

$$(D - \lambda_0)^2 y = (D - \lambda_0)((D - \lambda_0)y) = (D - \lambda_0)(q'(t)e^{\lambda_0 t}) = q''(t)e^{\lambda_0 t} ,$$

sodass

$$(D - \lambda_0)^m y = q^{(m)}(t)e^{\lambda_0 t} = 0,$$

da q ein Polynom des Grades $m - 1$ ist. Daraus folgt, dass

$$\mathrm{chp}(D)y = \tilde{p}(D)(D - \lambda_0)^m y = \tilde{p}(D)((D - \lambda_0)^m y) = 0$$

und zwar sind die Funktionen

$$y_k(t) = c_k t^k e^{\lambda_0 t}$$

für $0 \leq k \leq m - 1$ Lösungen. Die Funktion

$$y(t) = q(t)e^{\lambda_0 t} = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1} t^{m-1})e^{\lambda_0 t}$$

ist deshalb eine Lösung der Differentialgleichung. Wir haben deshalb bewiesen, dass, falls λ_0 eine m-fache Nullstelle ist, sind

$$e^{\lambda_0 t} , te^{\lambda_0 t} , \ldots , t^{m-1} e^{\lambda_0 t}$$

Lösungen von $Ly = 0$.

Beispiel 5.76. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$$

mit der Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 3\,, \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{chp}(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ sind $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Wir finden deshalb die Menge $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ der Lösungen, wobei $y_1(t) = e^t$ und $y_2(t) = te^t$ die entsprechenden zum 2-fachen Eigenwert $\lambda = 1$ Lösungen sind und $y_3(t) = e^{(-1+2i)t}$ und $y_4(t) = e^{(-1-2i)t}$ sind die entsprechenden zu den komplexen Eigenwerten $-1 \pm 2i$. Die zu y_3 und y_4 entsprechenden reellen Lösungen sind $e^{-t}\cos 2t$ und $e^{-t}\sin 2t$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}\cos 2t + c_4e^{-t}\sin 2t\,.$$

Um die Anfangsbedingungen zu erfüllen, berechnen wir

$$y'(t) = c_1e^t + c_2e^t + c_2te^t - e^{-t}(c_3\cos 2t + c_4\sin 2t) + 2e^{-t}(-c_3\sin 2t + c_4\cos 2t)\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_3 \\ 3 = y'(0) = c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4 \\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_1 = c_2 = 0\,, \end{cases}$$

sodass

$$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

die Lösung ist. □

5.9.4. Inhomogene lineare Differentialgleichungen.

Wir suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$Ly = K(t)\,,$$

wobei $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$ und $K(t)$ eine gegebene Funktion ist.

Satz 5.77. *Seien $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ Lösungen der Differentialgleichung $Ly = 0$, und sei $y_p(t)$ eine irgendwie gefundene Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Ly = K(t)$. Dann ist*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ky_n(t) + y_p(t) \tag{5.12}$$

die allgemeine Lösung von $Ly = K(t)$.

Beweis. Für $k = 1, \dots, m$ ist $Ly_k = 0$. Daraus folgt, dass

$$Ly = L\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k + y_p\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k L y_k + L y_p = L y_p\,.$$

Falls $Ly_p = K(t)$, ist auch $Ly = K(t)$, das heisst (5.12) eine Lösung ist.

Wir werden jetzt beweisen, dass alle Lösungen der Differentialgleichung $Ly = K(t)$ der Form (5.12) sind. In der Tat sei $\tilde{y}(t)$ eine beliebige Lösung, $L\tilde{y} = K(t)$. Daraus folgt, dass

$$L(\tilde{y} - y_p) = L\tilde{y} - Ly_p = K(t) - K(t) = 0\,,$$

das heisst $\tilde{y} - y_p$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $Ly = 0$ sein muss. Infolgedessen ist

$$\tilde{y} = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k + y_p\,,$$

das zu beweisen würde. □

Wir müssen deshalb eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Ly = K(t)$ finden.

Um die Lösung der Differentialgleichung $Ly = K$ zu finden, benutzen wir die *Methode der unbestimmten Koeffizienten.* Falls die Funktion $K(t)$ eine Funktion ist, die eine Lösung von $Ly = 0$ sein könnte, erraten wir eine von einigen Parameter abhängige Lösung und wir berechnen die Koeffizienten beim Ersetzen in der Differentialgleichung.

Beispiel 5.78. Wir suchen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t}\,. \tag{5.13}$$

Wir suchen zuerst die allgemeine Lösung von $y'' - 4y' - 12y = 0$. Wir werden später sehen, weil wir immer zuerst die Lösung der entsprechenden homogenenen Differentialgleichung $y'' - 4y' - 12y = 0$ finden müssen.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\mathrm{chp}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$ sind $\lambda = -2, 6$, sodass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gleich

$$y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t}$$

ist.

Jetzt suchen wir $y_p(t)$, In diesem Fall ist $K(t) = 3e^{5t}$. Die Exponentialfunktion wird nicht allein aus dem Nichts erscheinen, deshalb muss sie schon in unserer Vermutung der Lösung enthalten werden. Wir setzen deshalb

$$y_p(t) = ae^{5t}$$

so, dass $y_p'(t) = 5ae^{5t}$ und $y_p''(t) = 25ae^{5t}$. Aus unserer Vermutung folgt, dass

$$3e^{5t} = y_p''(t) - 4y_p'(t) - 12y_p(t) = 25ae^{5t} - 20ae^{5t} - 12e^{5t} = -7ae^{5t} \Rightarrow a = -\frac{3}{7}\,.$$

Die allgemeine Lösung von (5.13) lautet dann

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t} - \frac{3}{7} e^{5t}\,.$$

Falls die Lösung der Differentialgleichung (5.13) die Anfangsbedingungen $y(0) = 18/7$ und $y'(0) = -1/7$ erfüllen muss, erhalten wir

$$\begin{cases} \frac{18}{7} = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} = y'(0) = -2c_1 + 6c_2 - \frac{15}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{21}{7} \\ -2c_1 + 6c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1\,, c_1 = 2\,,$$

sodass

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{6t} - \frac{3}{7} e^{5t}\,.$$

Bemerkung 5.79. Wie gesagt, werden wir später sehen, warum wir zuerst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$ gefunden haben. Kurzum ist der Grund das folgende: falls wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$ wissen, können wir eine bessere Vermutung machen.

Beispiel 5.80. Wir suchen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 12y = \sin 2t \tag{5.14}$$

finden. Hier ist $K(t) = \sin 2t$ und wir haben schon gesehen, dass $y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t}$. Unsere Vermutung für $y_p(t)$ ist

$$y_p(t) = a\cos 2t + b \sin 2t$$

so, dass $y_p'(t) = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t$ und $y_p''(t) = -4a\cos 2t - 4b\sin 2t$. Beim Ersetzen in (5.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin 2t &= y'' - 4y' - 12y \\ &= -4a\cos 2t - 4b\sin 2t + 8a\sin 2t - 8b\cos 2t - 12a\cos 2t - 12b\sin 2t \\ &= (-16a - 8b)\cos 2t + (-16b + 8a)\sin 2t\,, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{cases} -16a - 8b = 0 \\ -16b + 8a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 8a + 32a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{40} \\ b = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

und

$$y_p(t) = \frac{1}{40}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t\,. \quad \square$$

Beispiel 5.81. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 12y = 2t^3 - t + 3 \tag{5.15}$$

kann durch die Vermutung $y_p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ gefunden werden. In der Tat erhält man beim ableiten und in (5.15) ersetzen

$$a = -\frac{1}{6}\,, b = \frac{1}{6}\,, c = -\frac{1}{9}\,, d = -\frac{5}{27}\,.$$

Beispiel 5.82. Wie oben, kann eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 12y = te^{4t} \tag{5.16}$$

durch die Vermutung $y_p(t) = e^{4t}(at + b)$ gefunden werden. In der Tat erhält man beim ableiten und in (5.16) ersetzen

$$a = -\frac{1}{12} \quad \text{und} \quad b = -\frac{1}{36}\,.$$

Beispiel 5.83. Wir suchen jetzt eine partikuläre Lösung de Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 12y = e^{6t}$$

und wir machen wie oben die Vermutung $y_p(t) = ae^{6t}$. In diesem Fall erhalten wir $y_p'(t) = 6ae^{6t}$ und $y_p''(t) = 36ae^{6t}$. Daraus folgt, dass

$$y'' - 4y' - 12y = 36ae^{6t} - 24ae^{6t} - 12ae^{6t} = 0$$

und kann nie gleich e^{6t} sein! Das Problem ist hier, dass e^{6t} eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = 0$ ist. In diesem Fall ist eine bessere Vermutung

$$y_p(t) = ate^{6t}\,.$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= ae^{6t} + 6ate^{6t} \\ y_p''(t) &= 6ae^{6t} + 6ae^{6t} + 36ate^{6t} = 12ae^{6t} + 36ate^{6t}\,, \end{aligned}$$

sodass

$$e^{6t} = 12ae^{6t} + 36ate^{6t} - 4ae^{6t} - 24ate^{6t} - 12ate^{6t} = 8ae^{6t} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

und

$$y_p(t) = \frac{1}{8}te^{6t}\,.$$

Wir können deshalb die Tabelle 1 erstellen

K(t)	Spektralbedingung	Ansatz für y_p
$e^{\lambda_0 t}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{Spec} L$	$y_p(t) = ae^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{Spec} L$ (m-fach)	$y_p(t) = at^m e^{\lambda_0 t}$
$\cos\omega t$ oder $\sin\omega t$	$\pm i\omega \notin \operatorname{Spec} L$	$y_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$
	$\pm i\omega \in \operatorname{Spec} L$ (m-fach)	$y_p(t) = t^m(a\cos\omega t + b\sin\omega t$
t^r	$0 \notin \operatorname{Spec} L$	$y_p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_r t^r$
	$0 \in \operatorname{Spec} L$ (m-fach)	$y_p(t) = t^m(a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_r t^r)$
$t^k e^{\lambda_0 t}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{Spec} L$	$y_p(t) = (a_0 + \cdots + a_k t^k)e^{\lambda_0 t}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{Spec} L$ (m-fach)	$y_p(t) = t^m(a_0 + \cdots + a_k t^k)e^{\lambda_0 t}$

Table 1. Partikuläre Lösungen

SATZ 5.84. *Sei $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$. Falls y_i eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = K_i(t)$ für $i = 1, 2$ ist, ist $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung $Ly = K$.*

BEISPIEL 5.85. Wir suchen eine partikuläre Lösung der Differentiagleichung

$$y'' - 4y' = 12y = e^{6t} + \sin 6\,. \tag{5.17}$$

Wegen des Satzes 5.84 ist eine partikülare Lösung $y_p(t)$ von (5.17) die Summe zweier Lösungen

$$y_p(t) = y_{1p}(t) + y_{2p}(t)\,,$$

wobei

$y_{1p}(t)$ eine Lösung der DifferentialGleichung $y'' - 4y' = 12y = e^{6t}$ und

$y_{2p}(t)$ eine Lösung der DifferentialGleichung $y'' - 4y' = 12y = \sin 6t$ sind.

Wir haben schon $y_{1p}(t)$ im Beispiel 5.83 gefunden, und zwar

$$y_{1p}(t) = \frac{1}{8} t e^{6t}\,.$$

Da $i6 \notin \operatorname{Spec}(L)$ ist, machen wir den Ansatz

$$y_{2p}(t) = a \cos 6t + b \sin 6t\,.$$

Wir können einfach erhalten, dass $a = \frac{1}{120}$ und $b = -\frac{1}{60}$, sodass

$$y_p(t) = \frac{1}{8} t e^{6t} + \frac{1}{120} \cos 6t - \frac{1}{60} \sin 6t$$

eine partikuläre Lösung ist.

5.9.5. Der (gedämpfte) harmonische Oszillator. Wir setzen das Beispiel des Federpendels fort. Die Differentialgleichung war

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t)\,,$$

wobei γ die Dämpfungskonstante war und k war die Konstante, die die Rückstellkraft des Feders beschreibt.

Wir suchen zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0\,.$$

Wir müssen verschiedene Fälle betrachten:

(1) Falls $\gamma = 0$ ist, ist das System nicht gedämpft. In diesem Fall sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $m\lambda^2 + k = 0$

$$\lambda_1 = i\omega_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega_0, \quad \text{wobei } \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Wir erhalten damit die Lösungen der Differentialgleichung $mu'' + ku = 0$

$$u_h(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}\,,$$

die auch in der folgenden Form

$$u_h(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

geschrieben werden kann, wobei

$$a := c_1 + c_2\,, \qquad \text{und} \qquad b = i(c_1 - c_2)$$

die Koeffizienten sind. Um die Lösung zu analysieren, ist es nutzlich die Lösung als

$$\begin{aligned} u_h(t)z &= R\cos(\omega_0 t - \delta) \\ &= R\cos\delta\cos\omega_0 t + R\sin\delta\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

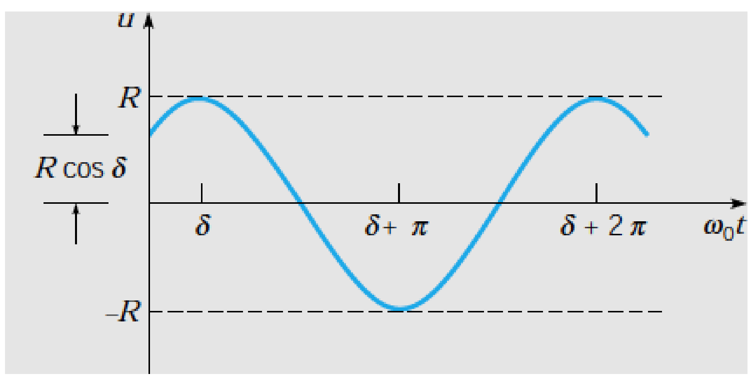
zu schreiben, wobei

$$R = \sqrt{a^2+b^2}\,, \quad \tan\delta = \frac{b}{a}\,.$$

Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}\,,$$

die *Frequenz* ist ω_0, die *Amplitude*[1] ist R und der *Phasewinkel* ist δ. In diesem Fall gibt es keine Dämpfung und die Amplitude bleibt konstant.



(2) Falls $\gamma \neq 0$, ist die charakteristische Gleichung $\mathrm{chp}(\lambda) = m\lambda^2 + \gamma\lambda + k\lambda = 0$ mit Nullstellen

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{-\frac{k}{m} + \frac{\gamma^2}{4m^2}} = -\epsilon \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \epsilon^2}\,,$$

wobei $\epsilon := \frac{\gamma}{2m}$.

$\boxed{\epsilon^2 > \omega_0^2}$ (Superkritische Dämpfung) Die Dämpfung ist stärker als die Schwingung

$$u_h(t) = c_1 e^{(\mu_1 - \epsilon)t} + c_2 e^{-(\mu_1+\epsilon)t}\,,$$

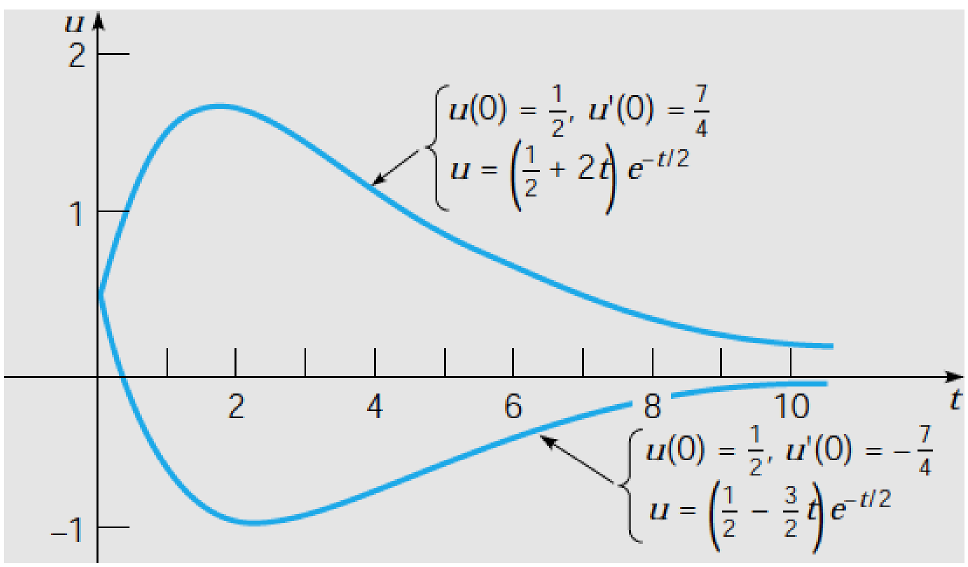
wobei $\mu_1 = \sqrt{\epsilon^2 - \omega_0^2} < \epsilon$.

[1]Die Amplitude ist die maximale Verschiebung der Mass.

$\boxed{\epsilon^2 = \omega_0^2}$ (Kritische Dämpfung) In diesem Fall gilt es

$$u_h(t) = c_1 e^{-\epsilon t} + c_2 t e^{-\epsilon t} = (c_1 + t c_2) e^{-\epsilon t} \,.$$

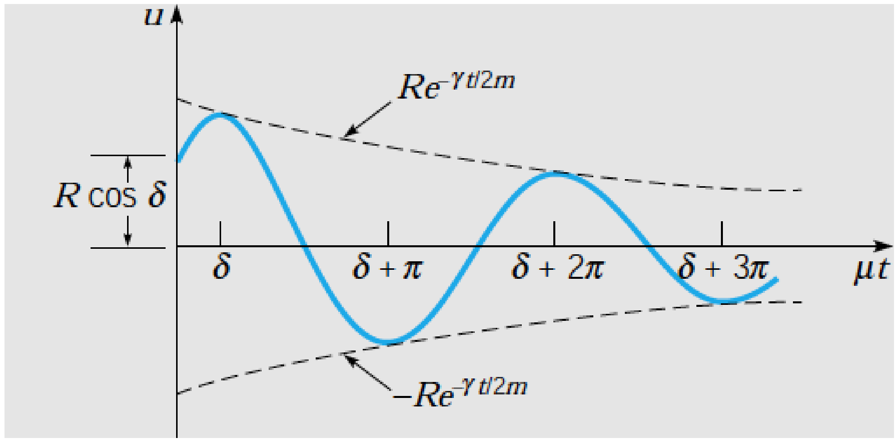
Falls $\epsilon^2 = \omega_0^2$, sind die Lösungen exponential fallend mit höchstens eine Nullstelle. Im nächsten Bild sehen wir zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung $u'' + u' + \frac{1}{4}u = 0$. Falls $u(0) = \frac{1}{2}$ und $u'(0) = \frac{7}{4}$ besitzt die Lösung keine Nullstelle (der Obere Graph); falls $u(0) = \frac{1}{2}$ und $u'(0) = -\frac{7}{4}$ besitzt die Lösung eine Nullstelle (der untere Graph).



$\boxed{\epsilon^2 < \omega_0^2}$ (Subkritische Dämpfung) In diesem Fall ist $\lambda = -\epsilon \pm i\mu$, wobei $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}$. Daraus folgt, dass

$$u_h(t) = e^{-\epsilon t}(a \cos \mu t + b \sin \mu t) = R e^{-\epsilon t} \cos(\mu t - \delta) \,,$$

wobei $a = R \cos \delta$ und $b = R \sin \delta$. Der Graph von u liegt zwischen den Kurven $\pm R e^{-\delta t}$ und sieht wie ein cosinus aus, deren Amplitude mit zunehmenden t fällt (gedämpfte Schwingung).

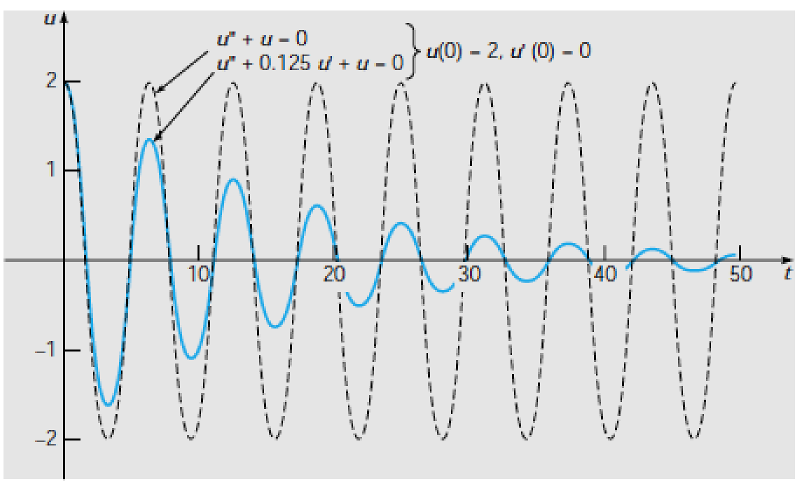


In diesen Fall ist

$$T = \frac{2\pi}{\mu}$$

die *Quasi-Periode*, das heisst die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima.

Im folgenden Bild sehen wir den Unterschied zwischen eine Schwingung mit einer kleinen Dämpfung (der blaue Graph) und mit keiner Dämpfung (der schwarze gestrichelte Graph).



Wir werden jetzt eine Anregung der Forme $F(t) = K_0 \cos \omega t$ anwenden, sodass die Differentialgleichung

$$mu'' + \gamma u' + ku = K_0 \cos \omega t$$

lauten wird. Wir müssen drei Fälle unterscheiden:

(1) $\omega_0 \neq \omega$ und das System ist ungedämpft ($\gamma = 0$).
(2) $\omega_0 \neq \omega$ und $\gamma \neq 0$.

(3) $\omega_0 = \omega$ und $\gamma = 0$.

(1) Wir suchen eine Lösung der Forme $u_p(t) = a_2 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t$. Da $k = m\omega_0^2$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t\,.$$

Nehmen wir an, dass $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Daraus folgt, dass

$$c_1 = -\frac{K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{und} \quad c_2 = 0\,,$$

sodass

$$u(t) = \frac{K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)\,. \tag{5.18}$$

Das ist die Summe zweier periodischen Funktionen, deren Periode ungleich ist, aber deren Amplitude gleich ist. Mithilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

erhalten wir

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta\,;$$

mit $\alpha = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ und $\beta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ können wir die Lösung (5.18) so schreiben:

$$u(t) = \left[\frac{2K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}\,.$$

Falls $|\omega_0 - \omega|$ klein ist, ist $\omega_0 + \omega$ viel grösser als $|\omega_0 - \omega|$. Deshalb schwingt $\sin \frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$ viel schneller als $\sin \frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$. Infolgedessen ist die Frequenz $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ und die Amplitude ist

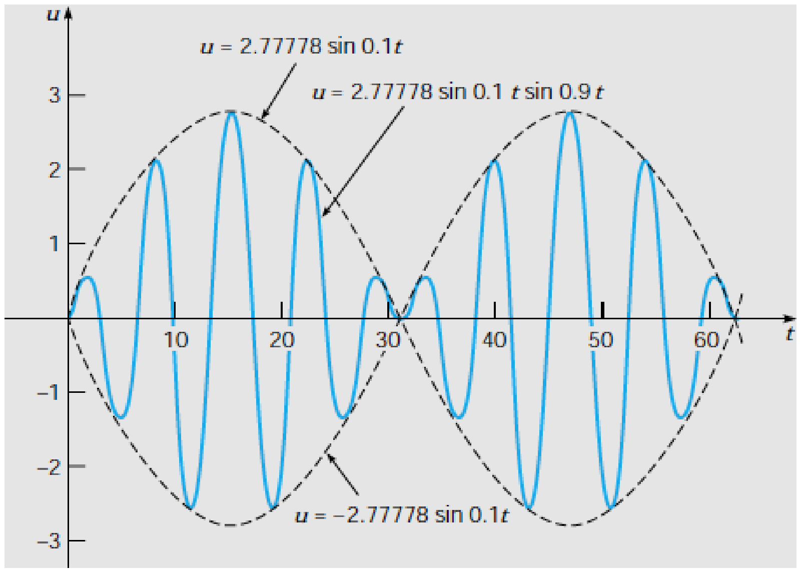
$$A = \frac{2K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\,.$$

Das ist genau was passiert, in Akustik, falls zwei Stimmgabeln mit fast gleicher Frequenz zusammen gespielt werden. In diesem Fall ist die periodische Amplitudenänderung für das blosse Ohr ziemlich offensichtlich. In der Elektronik wird die Amplitudenänderung mit der Zeit *Amplitudenmodulation* genannt.

In der Figure wird der Graph von u mit $\omega_0 = .5$, $\omega = .4$ and

$$\frac{2K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 2.7778$$

gezeichnet.



(2) In diesem Fall ist die Lösung

$$u(t) = e^{-\delta t}(a\cos\mu t + b\sin\mu t) + ce^{i\omega t}\,,$$

wobei

$$c = \frac{K_0}{(k - m\omega^2) + i\gamma\omega} = \frac{K_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega}\,.$$

Da $\lim_{t\to\infty} e^{-\epsilon t}(a\cos\mu t + b\sin\mu t) = 0$, heisst $u_s(t) = ce^{i\omega t}$ die *stationäre Lösung*. Da

$$|c| = \frac{K_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2}} =: R(\omega)$$

ist die Amplitude $R(\omega)$ in diesem Fall maximal, falls $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2$ minimal ist. Da

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2\omega^2 = (\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\epsilon^2))^2 + 4\epsilon^2(\omega_0^2 - \epsilon^2)\,,$$

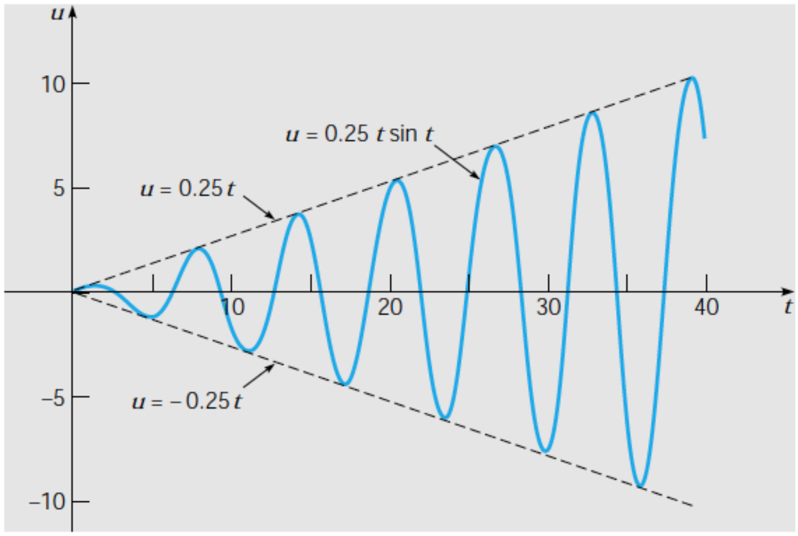
ist die Amplitude maximal, falls $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \epsilon^2}$.
(3) In diesem Fall ist die Lösung

$$u(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{K_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t\,.$$

Hier is die Frequenz der Anregung gleich der Frequenz des Systems. Wegen des Terms $t\sin\omega_0 t$ ist $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$. Das is die sogenannte *Resonanz*. Im folgelden Bild wird die Lösung $u(t) = \frac{1}{4}t\cos t$ der Differentialgleichung

$$u'' + u = \frac{1}{2}\cos t \text{ mit } u(0) = u'(0) = 0$$

gezeichnet.



Die Resonanz ist ein grosses Problem für die strukturelle Stabilität. Zum Beispiel müssen die Soldaten beim überqueren einer Bruche den Marschschritt unterbrechen: die periodische Kraft ihres Marsches könnte mit der Frequenz der Brücke in Resonanz treten. Das kann in Realität passieren, wie das Beispiel der Brücke in Tacoma, Washington zeigt, die in 1940 in Resonanz mit dem Wind trat und brach ein. Die Resonanz war auch ein Problem in der Konstruktion einer Kraftstoffhochdruckturbopumpe für den Hauptmotor des Space-Shuttles. Die Turbopumpe war instabil und konnte nicht bei über 20'000 rpm operiert werden, obwohl die vorgesehene Geschwindigkeit 39'000 rpm war. Das Space-Shuttle Program wurde deswegen während sechs Monaten unterbrochen, was einen täglichen Verlust von 500'000$ pro Tag zur Folge hatte. [2]

5.9.6. Die Eulersche Differentialgleichung. Die allgemeine Forme einer Eulersche Differentialgleichung ist

$$y^{(n)} + \frac{b_{n-1}}{r} y^{(n-1)} + \frac{b_{n-2}}{r^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{b_1}{r^{n-1}} y' + \frac{b_0}{r^n} y = 0\,, \tag{5.19}$$

wobei $r > 0$ die unabhängige Variable ist und $y = y(r)$.

Die Eulersche Differentiagleichung ist eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten nicht konstant sind. Die Methode um diese Differentialgleichung zu lösen ist sehr ähnlich zur Methode für die Lösung einer linearen homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Idee ist die Variabletransformation $r = e^t$ zu benutzen, um die Eulersche Differentialgleichung in einer Differentialgleichung mit konstante Koeffizienten zu verwandeln. Wir können aber eine Abkürzung nehmen und den Ansatz

$$y(r) = r^\alpha$$

machen, wobei α eine zu bestimmende Konstante ist.

Wir leiten $y(r) = r^\alpha$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} y'(r) &= \alpha r^{\alpha-1} \\ y''(r) &= \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(r) &= \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}_{\alpha_n} r^{\alpha-n}\,. \end{aligned}$$

---

[2]Aus Wikipedia: In 1935 at his annual birthday party/press meeting the 79-year-old American-Serbian inventor, electrical engineer, mechanical engineer and futurist Nikola Tesla related a story where he claimed a version of his mechanical oscillator caused extreme vibrations in structures and even an earthquake in downtown New York City. Reporter John J. O'Neill's biography of Nikola Tesla includes a version of this story (date of the telling not given).

One version of the story has Tesla experimenting with a small version of his mechanical oscillator at his laboratory on 46 East Houston Street near the Manhattan neighborhood of SoHo. Tesla said the oscillator was around 7 inches (18 cm) long, and weighing one or two pounds; something "you could put in your overcoat pocket." At one point while experimenting with the oscillator, he alleged it generated a resonance in several buildings causing complaints to the police. As the speed grew he said that the machine oscillated at the resonance frequency of his own building and, belatedly realizing the danger, he was forced to use a sledge hammer to terminate the experiment, just as the police arrived. Other versions have Tesla smashing the device before the police arrive and have multi-ton equipment in the basement moving around. Another version has Tesla clamping an oscillator to a building under construction and causing it to vibrate so violently the steelworkers working on it left the building in a panic.

At the 1935 party Tesla also claimed the mechanical oscillator could destroy the Empire State Building with "Five pounds of air pressure" if attached on a girder and that he expected to earn $100 million from the oscillator within two years.

Wir merken, dass α_n ein Polynom des Grades n in der Variable α ist. Wir setzen diese Ableitungen in der Differentialgleichung ein und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\alpha_n r^{\alpha-n} + \frac{b_{n-1}}{r}\alpha_{n-1}r^{\alpha-(n-1)} + \cdots + \frac{b_1}{r^{n-1}}\alpha_1 r^{\alpha-1} + \frac{\alpha_0}{r^n}r^\alpha = 0\\
\Rightarrow\, &\alpha_n r^{\alpha-n} + b_{n-1}\alpha_{n-1}r^{\alpha-n} + \cdots + b_1\alpha_1 r^{\alpha-n} + b_0 r^{\alpha-n} = 0\\
\Rightarrow\, &(\alpha_n + b_{n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + b_1\alpha_1 + b_0)r^{\alpha-n} = 0\,.
\end{aligned}$$

Wir nennen

$$\alpha_n + b_{n-1}\alpha_{n-1} + \cdots + b_1\alpha_1 + b_0 =: \mathrm{inp}(\alpha)$$

das *Indexpolynom* der Differentialgleichung (5.19) und

$$\mathrm{inp}(\alpha) = 0$$

ist die *Indexgleichung*. Falls α eine Nullstelle der Indexgleichung ist, ist $y(r) = r^\alpha$ eine Lösung der Differentialgleichung (5.19).

Beispiel 5.86. Wir suchen die Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + \frac{3}{r}y'' - \frac{3}{r^2}y' = 0\,.$$

Wir berechnen das Indexpolynom mit

$$\begin{cases}\alpha_3 &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\\ \alpha_2 &= \alpha(\alpha-1)\\ \alpha_1 &= \alpha\end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} b_2 &= 3\\ b_1 &= -3\\ b_0 &= 0\end{cases}$$

so, dass

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{inp}(\alpha) =& \alpha_3 + b_2\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_0\alpha_0\\
=& \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) - 3\alpha\\
=& \alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 2) + 3\alpha^2 - 3\alpha - 3\alpha\\
=& \alpha^3 - \cancel{3\alpha^2} + 2\alpha + \cancel{3\alpha^2} - 3\alpha - 3\alpha\\
=& \alpha^3 - 4\alpha\\
=& \alpha(\alpha^2 - 4)\\
=& \alpha(\alpha-2)(\alpha+2)\,.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der Indexgleichung sind $\alpha = 0, 2, -2$, infolgedessen die allgemeine Lösung

$$y(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3\frac{1}{r^2}$$

lautet. □

Im Beispiel 5.86 waren alle Nullstellen verschieden. Falls zwei Nullstellen gleich sind, müssen wir mit etwas multiplizieren. Wegen der vorherigen Bemerkung, dass die Transformation $r = e^t$ die Differentialgleichung in einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten verwandeln wurde und wegen unserer Kenntnisse der Theorie der Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, ist es zu erwarten, dass

$$y_1(r) = r^{\alpha_0} \quad \text{und} \quad y_2(r) = r^{\alpha_0} \log r$$

zwei linear unabhängige Lösungen sind, falls α_0 eine zweifache Nullstelle ist.

Beispiel 5.87. Wir suchen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{r}y' - \frac{k^2}{r^2}y = 0\,,$$

die die Temperaturverteilung auf einer Kreisscheibe oder auf Kreisringen beschreibt. Da

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \alpha(\alpha-1) \\ \alpha_1 &= \alpha \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b_1 &= 1 \\ b_0 &= -k^2 \end{cases}$$

ist das Indexpolynom

$$\operatorname{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2 = \alpha^2 - \alpha + \alpha - k^2 = \alpha^2 - k^2\,.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\boxed{k \neq 0}$ Es folgt, dass $\alpha_1 = k = -\alpha_2$ so, dass die allgemeine Lösung

$$y(r) = c_1 r^k + c_2 \frac{1}{r^k}$$

ist.

$\boxed{k = 0}$ In diesem Fall ist die Nullstelle $\alpha_0 = 0$ zweimal so, dass die allgemeine Lösung

$$y(r) = c_1 + c_2 \log r$$

ist. □

Es gibt auch die Möglichkeit, dass die Nullstellen vom Indexpolynom komplexe konjugierte Zahlen sind

$$\alpha_1 = \lambda + i\mu\,, \qquad \alpha_2 = \lambda - i\mu\,,$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. In diesen Fall sind

$$y_1(r) = r^\lambda \cos(\mu \ln r) \quad \text{und} \quad y_2(r) = r^\lambda \sin(\mu \ln r)$$

zwei linear unabhängige Lösungen.

Beispiel 5.88. Wir suchen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$r^2y'' + ry' + y = 0\,. \tag{5.20}$$

Um die übliche Form der Eulersche Differentialgleichung zu haben, teilen wir (5.20) durch r^2 und erhalten

$$y'' + \frac{1}{r}y' + \frac{1}{r^2} = 0\,.$$

Da

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \alpha(\alpha-1) \\ \alpha_1 &= \alpha \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} b_1 &= 1 \\ b_0 &= 1 \end{cases}$$

ist das Indexpolynom

$$\operatorname{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha + 1 = \alpha^2 - \alpha + \alpha + 1 = \alpha^2 + 1\,.$$

In diesem Fall sind

$$\alpha_1 = i \quad \text{und} \quad \alpha_2 = -i$$

so, dass die allgemeine Lösung für $r > 0$

$$y(r) = c_1 \cos(\ln r) + c_2 \sin(\ln r)$$

lautet. □

CHAPTER 6

Integralrechnung

Wir möchten eine Methode entwickeln, um die Fläche und das Volume beliebieger Gebiete zu berechnen. Wir müssen dafür den Begriff des Integrals einzuführen. Mit dem können wir:

- die Fläche zwischen der x-Achse und einer Kurve $0 \leq f(x) = y$, für $x \in [a, b]$,
- das Volume eines n-dimensionalen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^n$,
- die Länge einer Kurve

und viele andere Grössen berechnen.

Wir betrachten in diesem Kurs nur das Integral einer Funktion in einer Variable mit $\operatorname{image}(f) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Wir fangen mit $n = 1$ an. Sei $[a, b] \subseteq \operatorname{dom}(f)$. Wir schreiben

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \text{das Integral von } f \text{ von } a \text{ bis } b\,.$$

Das Integral sollte die folgenden Eigenschafen besitzen.

(1) Es sollte für jede Funktion f existieren, die stetig auf einem Intervall $[a, b]$ ist.

(2) Falls $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, sollte

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \operatorname{Fl}(B)$$

sei, wobei B das Gebiet zwischen der x-Achse und dem Graph von f bezeichnet.

(3) Insbesondere sollte

$$\int_{[a,b]} dx = b - a$$

sein.

(4) Falls $c \in [a, b]$, sollte

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,c]} f(x)\, dx + \int_{[c,b]} f(x)\, dx\,.$$

In diesem Fall sagen wir, dass das Integral *additiv bezüglich des Integrationsintervalls* ist.

(5) Falls $[a,b] \subseteq \mathrm{dom}(f)$ und $[a,b] \subseteq \mathrm{dom}(g)$, sollte

$$\int_{[a,b]} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \beta \int_{[a,b]} g(x)\,dx\,,$$

Wir nennen diese Eigenschaft die *Linearität* des Integrals.

Der Begriff des Intervals wird mithilfe der Riemannsche Summen definiert werden.

6.1. Riemannsche Summen

Sei $[a,b] \subseteq \mathrm{dom}(f)$ und seien $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ $n+1$ Punkte so, dass

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b\,.$$

Anders gesagt, betrachten wir eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls $[a,b]$ in n Teilintervallen

$$I_k := [x_{k-1}, x_k]\,, \qquad \text{für } 1 \leq k \leq n\,,$$

sodass

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k\,.$$

Die Länge von I_k is $x_k - x_{k-1}$: zum Beispiel können wir $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ wählen so, dass $[a,b]$ in n Teilintervallen der gleichen Länge $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ zerlegt wird. In Allgemeinen setzen wir

$$\delta := \max\{x_k - x_{k-1} \colon k = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Funktion f nicht nur stetig sonder auch Lipschitz auf $[a,b]$ ist, d.h. es ein $C > 0$ gibt so, dass für jedes $x, x' \in [a,b]$ $|f(x) - f(x')| < C|x - x'|$.

Um die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse approximative zu berechnen, wählen wir für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ einen Punkt $\xi_k \in I_k$.

Sei F_k die Fläche zwischen dem Graph von f und dem Intervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Wir können f approximativ berechnen, d.h.

$$F_k \sim f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Da

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} F_k\,,$$

PICTURE

können wir

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

schreiben.

Wie gut ist diese Näherung? Da f Lipschitz auf $[a,b]$ (und deshalb auf I_k) ist, ist für jedes $x \in I_k$ (und so insbesondere für $\xi_k \in I_k$)

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(\xi_k)| \le C|x - \xi_k| \le C\delta \\ \Rightarrow &-C\delta \le f(x) - f(\xi_k) \le C\delta \\ \Rightarrow &f(\xi_k) - C\delta \le f(x) \le C\delta + f(\xi_k)\,. \end{aligned}$$

Da $F_k \sim f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, liegt F_k zwischen der Fläche des Rechtecks der Höhe $f(\xi_k) - C\delta$ und des Rechtecks der Höhe $f(\xi_k) + C\delta$

$$(f(\xi_k) - C\delta)(x_k - x_{k-1}) \le F_k \le (f(\xi_k) + C\delta)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Wir möchten, dass $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n F_k$ und wir wissen dass $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = b - a$. Daraus folgt, dass

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - C\delta(b-a) \le \int_{[a,b]} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + C\delta(b-a)$$

und deshalb

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \le C\delta(b-a)\,. \tag{6.1}$$

Definition 6.1. Das Riemannsche Integral der Funktion f über $[a,b]$ ist

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,,$$

falls $\lim_{n\to\infty} \delta = 0$.

Bemerkung 6.2. Wir werden es nicht beweisen, aber das Riemannsche Integral ist unabhängig von der Zerlegung und von ξ_k.

Beispiel 6.3. Wir möchten die Fläche zwischen $f(x) = 1/x$ und dem Intervall $[1,2]$ mit einem Fehler $\le 10^{-2}$ berechnen.

Die Abschätzung in (6.1) hängt von der Lipschitz Konstante ab, deshalb müssen wir zuerst C berechnen. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{und, falls } x \ge 1, \text{ ist} \quad |f'(x)| \le 1\,.$$

Mithilfe des Mittelwertsatzes auf $[1,2]$ erhalten wir für jede $x, x' \ge 1$ mit $x < x'$, dass es ein $\xi \in (x, x')$ gibt mit

$$|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)|\,|x - x'| \le |x - x'|\,.$$

Daraus folgt, dass wir $C = 1$ wählen können.

Wir müssen jetzt n wählen so, dass

$$C\frac{(b-a)^2}{n} \le 10^{-2}\,.$$

Da $C\frac{(b-a)^2}{n} = \frac{1}{n}$, wir wählen $n \geq 100$. Wir wählen jeztz die Zerlegung in Intervallen der gleichen Länge, d.h.

$$I_k := \left[1 + \frac{k-1}{100}, 1 + \frac{k}{100}\right] \qquad \text{und} \qquad \xi_k := 1 + \frac{k}{100}\,,$$

Wir erhalten deshalb

$$\sum_{k=1}^{100} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1+\frac{k}{100}}\frac{1}{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{100}{100+k}\frac{1}{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{100+k} \simeq 0.669065\,.$$

Wir möchten jeztz einen exacten Wert des Integrals $\int_{[1,2]} \frac{1}{x}\,dx$ berechnen. Wir setzen $x_k := 2^{k/n}$, für $1 \leq k \leq n$: mit dieser Wahl sind die Intervalle

$$I_k = [2^{(k-1)/n}, 2^{k/n}]$$

der ungleichen Länge

$$\mu(I_k) = x_k - x_{k-1} = 2^{k/n} - 2^{(k-1)/n} = 2^{(k-1)/n}(2^{1/n} - 1)\,.$$

Da $(k-1)/n \leq 1$, haben wir auch

$$\delta = \max_{k=1,\dots,n} \mu(I_k) = \max_{k=1,\dots,n} 2^{(k-1)/n}(2^{1/n} - 1) \leq 2(2^{1/n} - 1)\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \delta = \lim 2(2^{1/n} - 1) = 0$$

und deshalb ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) = \int_{[1,2]} \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Um diesen Limes zu berechnen, setzen wir $\xi_k := x_{k-1} = 2^{(k-1)/n}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{[1,2]} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k/n}}{2^{(k-1)/n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (2^{1/n} - 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} n(2^{1/n} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\log 2} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{d}{dx} e^{x\log 2}\Big|_{x=0} \\
&= \log 2 e^{x \log 2}\Big|_{x=0} = \log 2\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Definition 6.4. Wir sagen, dass f *Riemann-integrierbar* auf $[a,b]$ ist, falls $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ existiert.

BEMERKUNG 6.5. Wir haben gesehen, dass eine Lipschitz Funktion ist Riemann-integrierbar. In der Tat ist es genug, dass f beschänkt und *stückweise stetig* ist. Eine Funktion ist stückweise stetig, falls es eine Zerlegung des Definitionsbereich von f in endlichen vielen (in der Tat abzählbar vielen) Intervallen gibt, wo die Funktion stetig ist.

PICTURE

6.1.1. Eigenschaften des Riemannsche-Integrals. Das Riemannsche-Integral besitzt die gesuchten Eigenschaften:

EIGENSCHAFTEN. *Seien f, g R-integrierbar auf $[a, b]$*

(1) *Sei auch g R-integrierbar auf $[a, b]$ und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$\int_{[a,b]} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_{[a,b]} f(x)\, dx + \beta \int_{[a,b]} g(x)\, dx\,.$$

(2) *Sei $c \in [a, b]$. Dann*

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,c]} f(x)\, dx + \int_{[c,b]} f(x)\, dx\,.$$

(3) *Insbesondere gilt*

$$\int_{[a,b]} = b - a\,.$$

(4)

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\, dx\right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)|\, dx\,.$$

(5) *Sei $|f(x)| \leq M$ auf $[a, b]$. Dann ist*

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\, dx\right| \leq M(b - a)\,.$$

Die zwei Ungleichungen folgen aus den entsprechenden Eigenschaften einer endlichen Summe. Zum Beispiel für (5):

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| &\le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,|(x_k - x_{k-1})| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} M(x_k - x_{k-1}) \\ &= M\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= M(b-a)\end{aligned}$$

6.2. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 6.6. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die alle Werte zwischen $\eta_* := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\eta^* := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ nimmt. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

Bemerkung 6.7. Wegen des Zwischenwertsatzes erfüllt eine stetige Funktion die Voraussetzungen des Satzes. Stetigkeit der f ist aber nicht nötig.

Beweis (Beweis des Satzes 6.6). Für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$\eta_* \le f(x) \le \eta^*\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\eta_*(b-a) = \int_{[a,b]} \eta_*\,dx \le \int_{[a,b]} f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} \eta^*\,dx = \eta^*(b-a)\,.$$

Wir können alle bei $b-a$ dividieren und erhalten

$$\eta_* \le \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)\,dx \le \eta^*\,.$$

d.h.

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)\,dx =: \eta \in [\eta_*, \eta^*]\,.$$

Wegen der Voraussetzungen für f gibt es $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \eta$. Daraus folgt, dass

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,.$$

□

6.3. Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Wir werden jetzt eine Methode entwickeln, um die Integrale zu berechnen.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a \in I$ ein innerer Punkt. Wir definieren eine Funktion $F_a\colon I \to \mathbb{R}$

$$F_a(x) := \begin{cases} \int_{[a,x]} f(t)\,dt & \text{falls } x \geq a \\ -\int_{[x,a]} f(t)\,dt & \text{falls } x \leq a\,. \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften des Riemannsche-Integrals gilt für $x_1 < x_2$

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = \int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt\,.$$

In der Tat ist für $x_1 < x_2$

$$\int_{[a,x_2]} f(t)\,dt = \int_{[a,x_1]} f(t)\,dt + \int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt$$

so, dass

$$F_a(x_2) = F_a(x_1) + \int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt\,.$$

Desweiteren gibt es aus dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [x_1, x_2]$ mit

$$F_a(x_2) - F_a(x_1) = \int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt = f(\xi)(x_2 - x_1)\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{F_a(x_2) - F_a(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi)$$

so, dass

(1)

$$\lim_{x_2 \to x_1^+} \frac{F_a(x_2) - F_a(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1^+} f(\xi)\,.$$

Da f stetig ist, erhalten wir

$$F_a'(x_1^+) = f(x_1)\,.$$

(2) Gleichermassen haben wir

$$\lim_{x_1 \to x_2^-} \frac{F_a(x_2) - F_a(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \to x_2^-} f(\xi)$$

und so

$$F_a'(x_2^-) = f(x_2)\,.$$

Da $x_1, x_2 \in I$ beliebig waren, gilt für alle $x \in I$

$$F_a'(x) = f(x)\,.$$

Wir haben deshalb den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 6.8 (Hauptsatz der Infinitesimalrechnung, I). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ ein innerer Punkt und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stetige Funktion. Dann ist*

$$\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f(t)\,dt = f(x) \text{ falls } x \geq a$$
$$\frac{d}{dx}\int_{[x,a]} f(t)\,dt = -f(x) \text{ falls } x \leq a\,.$$

DEFINITION 6.9. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $f = F'$, wobei $F : I \to \mathbb{R}$, heisst F eine *Stammfunktion* von f auf I.

BEISPIEL 6.10. F_a ist eine Stammfunktion von f.

BEMERKUNG 6.11. Falls F_0 eine Stammfunktion von f auf I ist, ist $F_0 + k$ auch eine Stammfunktion für jede Konstante k. In der Tat ist

$$(F_0 + k)' = f\,.$$

Jede andere Stammfunktion ist der Forme $F_0 + k$ für eine Konstante k. In der Tat sei F eine andere Stammfunktion, d.h. $F' = f$. Dann ist

$$(F - F_0)' = F' - F_0' = f - f = 0\,.$$

Daraus folgt, dass $F - F_0 = k$, d.h. $F = F_0 + k$. Infolgedessen erhalten wir für $a, b \in I$

$$F(b) - F(a) = (F_0(b) + k) - (F_0(a) + k) = F_0(b) - F_0(a)\,. \tag{6.2}$$

DEFINITION 6.12. Die Menge der Stammfunktionen von $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst das *unbestimmte Integral von f*. Wir benutzen die Schreibweise

$$\int f(x)\,dx$$

SATZ 6.13 (Hauptsatz der Integralrechnung, II). *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Falls $a, b \in I$, gilt*

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

BEWEIS. Wir können die Stammfunktion F_a nehmen. Da $F_a(a) = 0$ ist

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a) = F(b) - F(a)\,,$$

wobei die letze Gleichung folgt aus (6.2). □

Notation. (1) Wir schreiben

$$\int f(x)\, dx$$

für die Menge der Stammfunktionen.

(2)

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b\,.$$

Wegen des ersten Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung ist auch

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\,,$$

d.h. das Riemannsche-Integral kann mithilfe der Stammfunktionen berechnen werden.

Beispiel 6.14.

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \log t|_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2\,. \quad \square$$

6.4. Technik des Integrierens

Um ein Integral zu berechnen, müssen wir eine Stammfunktion des Integrands finden.

Beispiel 6.15. (1) Falls $n \neq -1$, ist $\int t^n\, dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$.
(2) Falls $\alpha \neq -1$ und $t > 0$ ist $\int t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + C$.
(3) $\int e^{\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C$.
(4) $\int \cosh t\, dt = \sinh t + C$ und $\int \sinh t\, dt = \cosh t + C$.
(5) $\int \cos t\, dt = \sin t + C$ und $\int \sin t\, dt = -\cos t + C$.
(6) $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$.
(7) $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$.

Beispiel 6.16. Sai $f(t) \neq 0$ auf dem Intervall I. Dann ist

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \log|f(t)| + C\,.$$

In der Tat gilt für die Ableitung des Absolutbetrags $g(t) := |t|$

$$g'(t) = \frac{t}{|t|} = \frac{|t|}{t}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{d}{dt}(\log|f(t)|) = \frac{1}{|f(t)|}\frac{|f(t)|}{f(t)} f'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}\,. \quad \square$$

Beispiel 6.17. Auf $(0, \pi)$ ist $\sin t > 0$. Daraus folgt, dass

$$\int \cot t \, dt = \int \frac{\cos t}{\sin t} \, dt = \log |\sin t| + C = \log(\sin t) + C \, .$$

Um die Stammfunktionen zu finden, müssen wir einige Technik des Integrierens entwickeln.

6.4.1. Partielle Integration. Wir haben die Regel der Ableitung eines Produktes gesehen: falls f und g differenziarbäre sind, ist

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \, .$$

Daraus folgt, dass $f(t)g'(t) = (f(t)g(t))' - f'(t)g(t)$ und deshalb

$$\begin{aligned} \int f(t)g'(t) \, dt &= \int (f(t)g(t))' \, dt - \int f'(t)g(t) \, dt \\ &= f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) \, dt \end{aligned} \tag{6.3}$$

und

$$\int_a^b f(t)g'(t) \, dt = f(t)g(t)\big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) \, dt \, . \tag{6.4}$$

Um diese Regel anzuwenden, muss man zuerst das Integrand als ein Produkt einer Funktion und der Ableitung einer anderen Funktion erkennen. Meistens sollte man es machen so, dass das Integral an der rechten Seite einfacher als das originelle Integral ist. (Einige integralen, insbesondere die die Funktionen cos und sin enthalten, können eine Ausnahme zur "Regel" sein. Sehen Beispiele 6.20 und 6.21.)

Beispiel 6.18. Wir berechnen $\int t \cos t \, dt$. Wir setzen $f(t) = t$ und $g'(t) = \cos t$ so, dass $f'(t) = 1$ und $g(t) = \sin t$. Aus der Formel (6.3) folgt, dass

$$\int t \cos t \, dt = t \sin t - \int \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + C \, .$$

Wit möchten jetzt $\int t^n \cos t \, dt$ berechnen. Um es zu machen, setzen wir $f(t) = t^n$ und $g'(t) = \cos t$ so, dass $f'(t) = tn^{n-1}$ und $g(t) = \sin t$. Die Formel (6.3) ist dann

$$\int t^n \cos t \, dt = t^n \sin t - n \int t^{n-1} \sin t \, dt \, .$$

Man kann dann die Stammfunktion rekursiv berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int t^n \cos t\,dt &= t^n \sin t - n \int t^{n-1} \sin t\,dt \\
&= t^n \sin t - n \left(-t^{n-1} \cos t + (n-1) \int t^{n-2} \cos t\,dt \right) \\
&= t^n + nt^{n-1} \cos t - n(n-1) \int t^{n-2} \cos t\,dt \\
&= t^n + nt^{n-1} \cos t - n(n-1) \left(t^{n-2} \sin t - (n-2) \int t^{n-3} \sin t\,dt \right) \\
&= t^n + nt^{n-1} \cos t - n(n-1)t^{n-2} \sin t + n(n-1)(n-2) \int t^{n-3} \sin t\,dt \\
&= t^n + nt^{n-1} \cos t - n(n-1)t^{n-2} \sin t + n(n-1)(n-2)t^{n-3} \cos t \\
&\qquad + n(n-1)(n-2)(n-3) \int t^{n-4} \cos t\,dt \\
&= \ldots \\
&= t^n + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j n(n-1)\ldots(n-2j)t^{n-2j-1} \cos t \\
&\qquad + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j n(n-1)\ldots(n-2j+1)t^{n-2j} \sin t\,.
\end{aligned}
$$

Anders gesagt,

$$
\int t^n \cos t\,dt = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\,,
$$

wobei

$$
a_j = \begin{cases} (-1)^j n(n-1)\ldots(n-2j) \cos t & j = n-2j-1 \\ (-1)^j n(n-1)\ldots(n-2j+1) \sin t & j = n-2j\,. \end{cases}
$$

□

Beispiel 6.19. Wir möchten das unbestimmte Integral

$$
\int \log t\,dt
$$

berechnen. In diesem Fall müssen wir einen kleinen Trick benutzen. Wir setzen $f(t) = \log t$ und $g(t) = 1$ so, dass $f'(t) = 1/t$ und $g(t) = t$. Somit erhalten wir

$$
\int \log t\,dt = \int 1 \cdot \log t\,dt = t \log t - \int dt = t \log t - t + C\,.
$$

□

Beispiel 6.20. Wir suchen die Stammfunktion von

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt \,.$$

Wir setzen $f(t) = \cos \beta t$, $g'(t) = e^{\alpha t}$ so, dass $f'(t) = -\beta \sin \beta t$ und $g(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$. Dann ist

$$\int e^{\alpha t} \cos(\beta t) \, dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \sin \beta t \,. \tag{6.5}$$

Wir wenden noch einmal die Methode der partiellen Integration, dieses Mal mit $f(t) = \sin \beta t$ und $g'(t) = e^{\alpha t}$ so, dass $f'(t) = \beta \cos \beta$ und $g(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$. Dann wird (6.5)

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt =& \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \sin \beta t \\
=& \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt \right) \\
=& \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt \,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t) + C' \,,$$

oder

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt =& \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \sin(\beta t) + C \\
=& \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + C \,.
\end{aligned}$$

Wir könnten auch eine alternative Methode nutzen, d.h. könnten wir bemerken, dass

$$\int e^{\alpha t + i\beta t} \, dt = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{\alpha t + i\beta t} + C = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t + i\beta t} + C \,.$$

Mithilfe der Eulersche Formel $e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha t + i\beta t} \, dt &= \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t + i\beta t} + C \\
&= \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + C \qquad (6.6) \\
&= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + i \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) + C
\end{aligned}$$

Wir haben aber auch

$$\int e^{\alpha t+i\beta t}\,dt = \int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt + i\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt \tag{6.7}$$

Die rechten Seiten von (6.6) und (6.7) sind zwei gleicheinanderen komplexen Zahlen: insbesondere sind die reellen Teilen gleich, d.h.

$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)+C\,.$$

Mit dieser Methode haben wir gleichzeitig bewiesen, dass

$$\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)+C\,.$$

□

Beispiel 6.21. Wir möchten jetzt

$$c_n := \int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$$

berechnen.

Wir werden eine rekursive Formel für c_n finden. Es ist einfach zu sehen, dass

$$c_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad c_1 = \int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \sin t|_0^{\pi/2} = 1\,.$$

Um c_n zu berechnen, setzen wir $f(t) = \cos^{n-1} t$ und $g'(t) = \cos t$ so, dass $f'(t) = -(n-1)\cos^{n-2} t\sin t$ und $g(t) = \sin t$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt\\
&= \sin t\cos^{n-1} t|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2} t\sin^2 t\,dt\\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2} t(1-\cos^2 t)\,dt\\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2}(\cos^{n-2} t-\cos^n t)\,dt\\
&= (n-1)(c_{n-2}-c_n)\,,
\end{aligned}$$

oder

$$c_n = \frac{n-1}{n}c_{n-2}\,.$$

Falls $n = 2m$ ist

$$c_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot c_0 = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Falls $n = 2m+1$ ist

$$c_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot c_1 = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\,.$$

Nehmen wir an, dass

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} = 1 \tag{6.8}$$

(wir werden es gerade beweisen). Aus (6.8) folgt, dass

$$\frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} \to 1\,,$$

d.h.

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots\,, \tag{6.9}$$

die eine Näherung von $\pi/2$ gibt. Diese Näherung heisst das *Wallissche Produkt.*

Wir müssen noch (6.8) beweisen. Da $\cos t \leq 1$ ist, gilt für jedes $t \in [0, \pi/2]$

$$\cos^{2m} t \geq \cos^{2m+1} t \geq \cos^{2m+2} \geq \dots$$

so, dass

$$\begin{aligned}
&\int \cos^{2m} t\, dt \geq \int \cos^{2m+1} t\, dt \geq \int \cos^{2m+2}\, dt \\
\Rightarrow & c_{2m} \geq c_{2m+1} \geq c_{2m+2} = \frac{2m+1}{2m} c_{2m} \\
\Rightarrow & 1 \geq \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \frac{2m+1}{2m} \\
\Rightarrow & 1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2m+1}}{c_{2m}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2m+1}{2m} = 1
\end{aligned}$$

Wegen des Vergleichskriterium ist (6.8) bewiesen. □

6.4.2. Substitution. Die Methode der partiellen Integration ist die Umkehrung der Ableitung eines Produktes. Die Methode der *Substitution* ist die Umkehurung der Kettenregel.

SATZ 6.22. *Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, wobei $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Nehmen wit an, dass φ und f beschränkt und stückweise stetig sind. Dann ist*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \left(\int f(x)\, dx \right)\bigg|_{x=\varphi(t)}$$

und deshalb

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx\,.$$

Beweis. Sei $F(x) = \int f(x)\,dx$ eine Stammfunktion von f, $f = F'$. Dann ist

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

so, dass $F(\varphi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ist. Daraus folgt, dass

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t) + C = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

$\square$

Beispiel 6.23. Wir berechnen

$$\int {\frac{3t+2}{3t^2+4t+2}}^{5/2} dt \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} {\frac{3t+2}{3t^2+4t+2}}^{5/2} dt\,.$$

Mit $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ ist $\varphi'(t) = 6t + 4 = 2(3t + 2)$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int {\frac{3t+2}{3t^2+4t+2}}^{5/2} dt &= \left(\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^{5/2}}\right)_{x=\varphi(t)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,x^{-3/2}\big|_{x=\varphi(t)} \\ &= -\frac{1}{3}(3t^2+4t+2)^{-3/2} + C\end{aligned}$$

und damit

$$\int_{-1}^{1} {\frac{3t+2}{3t^2+4t+2}}^{5/2} dt = -\frac{1}{3}(3t^2+4t+2)^{-3/2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}9^{-3/2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{3} = \frac{26}{81}\,.$$

$\square$

Um die Methode der Substitution zu benutzen, müssen wir die folgenden Schritten nehmen:

(1) Substituiren $x := \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$;
(2) Integrieren unbestimmt nach x;
(3) Substituiren zurück $\varphi(t) = x$: am Ende muss das unbestimmte Integral einer Funtktion der variable x noch einmal eine Funktion der Variable x sein.

Falls wir ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnen müssen, können wir zwei verschiedene aber ganz äquivalente Wege nehmen:

(1) Substituiren $x := \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$;
(2) Integrieren unbestimmt nach x;
(3) Substituiren zurück $\varphi(t) = x$;
(4) Berechnen $F(b) - F(a)$.

(1) Substituiren $x := \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$;
(2) Ersetzen die x-Grenzen mit den t-Grenzen;
(3) Integrieren.

Wir haben im Beispiel 6.23 den Weg an der linken Seite angewendet. Das gleiche Beispiel mit dem Weg and der rechte Seite wurde so laufen:

Beispiel 6.24. Da $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$, ist $\varphi(-1) = 1$ und $\varphi(1) = 9$. Daraus folgt, dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{3t+2}{3t^2+4t+2}^{5/2} dt = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{dx}{x^{5/2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-3/2}\Big|_1^9 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}-1\right) = \frac{26}{81}\,.$$

Beispiel 6.25. Wir berechnen

$$\int (\cos^3 t + \cos t)\, dt \quad \text{und} \quad \int_{\pi/6}^{\pi} (\cos^3 t + \cos t)\, dt\,.$$

Mitfihle der trigonometrischen Identität $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ erhalten wir

$$\int (\cos^3 t + \cos t)\, dt = \int (1+\cos^2 t)\cos t\, dt = \int (2 - \sin^2 t)\cos t\, dt\,.$$

Mit der Substitution $x = \sin t$ ist $dx = \cos t\, dt$, sodass

$$\begin{aligned}\int (\cos^3 t + \cos t)\, dt &= \int (2-\sin^2 t)\cos t\, dt = \left(\int (2-x^2)\, dx\right)_{x=\sin t} \\ &= \left(2x - \frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_{x=\sin t} = 2\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi} (\cos^3 t + \cos t)\, dt &= \left(2\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi} = 0 - \left(2\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\frac{1}{2} = -\frac{23}{24}\,.\end{aligned}$$

□

Beispiel 6.26. Wir möchten jetzt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$$

berechnen. Um das unbestimmte Integral zu berechnen, setzen wir $t := 1 + e^x$. Hier können wir t als eine Funktion von x betrachten und die Ableitung von t nach x

$$\frac{dt}{dx} = e^x$$

berechnen. Wir können aber formel die äquivalente Schreibweise

$$dt = e^x\, dx$$

benutzen und, $e^x = t - 1$, erhalten wir

$$dx = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t-1}\,.$$

Damit ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{t-1}\, dt\,.$$

Wir machen jetzt eine zweite Substitution, und zwar $t = u^2$, $dt = 2u\,du$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{t-1}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{u^2}}\frac{1}{u^2-1}2u\,du \\ &= \int \frac{2\,du}{u^2-1} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,du = \log|u-1| - \log|u+1| + C \\ &= \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \log\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right| + C = \log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C\,.\end{aligned}$$

Wir hätten vorsichtiger mit den Variablen sein sollen und schreiben

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \left(\int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{t-1}\,dt\right)_{t=1+e^x} = \left(\int \frac{1}{\sqrt{u^2}}\frac{1}{u^2-1}2u\,du\right)_{u=\sqrt{1+e^x}} \\ &= \left(\int \frac{2\,du}{u^2-1}\right)_{u=\sqrt{1+e^x}} = \left(\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,du\right)_{u=\sqrt{1+e^x}} \\ &= (\log|u-1| - \log|u+1| + C)_{u=\sqrt{1+e^x}} = \left(\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C\right)_{u=\sqrt{1+e^x}} \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C\,.\end{aligned}$$

Die Schreibweise ist aber ein bisschen Schwerfällig, deshalb werden wir manchmal ein bisschen nachlässig sein.

Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|\Bigg|_{x=0}^{x=\log 3} = \log\frac{1}{3} + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1}\frac{1}{3} = \log\frac{3+2\sqrt{2}}{3} = \log\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\,.\end{aligned}$$

Äquivalent ist

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{t-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2\,du}{u^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,du \\ &= \log\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^2 = \log\frac{1}{3} - \log\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \log\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\end{aligned}$$

□

6.4.3. Integration der rationalen Funkionen. Das Ziel ist zu lernen, wie man ein Integral der Forme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ berechnen kamm, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind. Wir bemerken, dass die Ableitung einer rationalen Funktion noch eine rationale Funktion ist. Aber

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

oder

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

zeigt, dass das Integral einer rationalen Funktion nicht unbedingt eine rationale Funktion sein muss (aber es kann sein). Wir werden aber sehen, dass das Integral einer rationalen Funktion durch Polynome, rationellen Funktionen, arctan und Logarithmus dargestellt werden kann.

Idee. Man sollte eine rationale Funktion als die Summe von einfacheren rationalen Funktionen schreiben so, dass diese rationale Funktionen integriert werden können. Das ist die *Partialbruchzerlegungsmethode* (PBZ).

Beispiel 6.27. Aus

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} = \frac{2(x+3)+3(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{5x+3}{x^2+2x-3}$$

folgt, dass

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x+3}\,dx = 2\log|x-1| + \log|x+3| + C\,.$$

Wie können wir diese Zerlegung finden?

Beispiel 6.28. Betrachen wir den Quotient

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,.$$

Wir können wir einfach $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ schreiben so, dass

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{x^2+2x-3}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$5x+3 = A(x-1) + B(x+3) = (A+B)x + (-A+3B)$$

sein muss, oder

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -A+3B=3 \end{cases} \quad \Rightarrow A=3 \quad B=2\,,$$

sodass

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-1}\,.$$

Was ist die allgemeine Methode?

1. Schritt: *Falls* $\mathrm{gr}(p(x)) \geq \mathrm{gr}(q(x))$, *finden* $d(x)$ *und* $r(x)$ *mit* $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(q(x))$ *so, dass*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\,.$$

Wir nehmen deshalb an, dass $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(q(x))$.

Bemerkung 6.29. Jede rationale Funktion kann als eine Summe endlicher vieler rationaler Funktionen der Forme

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$$

geschrieben werden, wobei $k, m \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b^2 - 4c < 0$ (d.h. $x^2 + bx + c$ kann nicht als Produkt zweier Faktoren des Grades 1 mit reellen Koeffizienten geschrieben werden).

Man muss vier Fälle unterscheiden:

(I) $q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, *wobei* $x_i \neq x_j$ *für* $i \neq j$.

Wir schreiben

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

und wir müssen $A_1, \dots, A_n$ finden.

Beispiel 6.30. Wir möchten die Stammfunktion

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$$

finden.

Da $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$, schreiben wir

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2} = \frac{A_1(x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

so, dass

$$2x^2 + 5x - 1 = A_1(x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-1)\,. \tag{6.10}$$

Wir konnten das Produkt an der rechten Seite ausführen und die Koeffiezienten der Monome des gleichen Grads vergleichen. Es ist aber einfacher, die Formel (6.10) in geeigneten Punkten auszuwerten. Um es zu machen, sind die Nullstellen sehr nutzlich, weil viele Terme an der rechten Seite verschwinden.

$$\begin{aligned}
&\text{Falls } x = 0 \quad (6.10) \Rightarrow -1 = A_1(-1)(2) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}\,;\\
&\text{falls } x = 1 \quad (6.10) \Rightarrow 2 + 5 - 1 = A_2 \cdot 1(1+2) \Rightarrow A_2 = 2\,;\\
&\text{falls } x = -2 \ (6.10) \Rightarrow 2(-2)^2 + 5(-2) - 1 = A_3(-2)(-3) \Rightarrow A_3 = -\frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

sodass

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{1}{2}\log|x| + 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+2| + C\,.$$

□

(II) $q(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$, *aber* x_i *ist nicht unnbedingt* $\neq x_j$ *für* $i \neq j$.

Falls x_1 eine p-fache Nullstelle ist, schreiben wir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-x_1)^p} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

und wir müssen $A_1, \dots, A_n$ finden.

Beispiel 6.31. Wir möchten das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$$

berechnen. Wir schreiben

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

und wir müssen A_1, A_2, A_3 finden so, dass

$$x^2+2x+3 = A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)\,. \tag{6.11}$$

Wie oben,

falls $x = 1$ $\quad$ (6.11) $\Rightarrow 1+2+3 = A_1 2^2 \Rightarrow A_1 = \frac{3}{2}$

falls $x = -1$ $\quad$ (6.11) $\Rightarrow (-1)^2 + 2(-1) + 3 = A_3(-1-1) \Rightarrow A_3 = -1\,.$

Wir haben hier nur zwei Nullstellen. Der Punkt $x = 0$ ist aber immer einen nützlichen Punkt einzusetzen. So falls $x = 0$, folgt es aus (6.11), dass

$$3 = A_1 + A_2(-1)(1) + A_3(-1) \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\,.$$

□

Bemerkung 6.32. Falls $(x+a)^p$ im Nenner erscheint, müssen wir für diesen Faktor die Summe $\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x+a)^k}$ betrachten. Das gilt für jedes Faktor $(x+a)^p$, der im Nenner erscheint.

(III) *Im Nenner gibt es einen Faktor x^2+bx+c mit $b^2-4c<0$.*

Beispiel 6.33. Wir möchten die Stammfunktion

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$$

finden. Es gilt

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\,,$$

und wir setzen

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

Wir müssen A, B und C finden so, dass

$$3x^2+2x-2=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)\,. \tag{6.12}$$

Wie oben, setzen wir geeignete Punkte ein:

$$\begin{aligned} &\text{falls } x=1 \quad (6.12)\Rightarrow 3+2-2=A(x^2+x+1)\Rightarrow A=1\\ &\text{falls } x=0 \quad (6.12)\Rightarrow -2=1(0+0+1)+(0+C)(0-1)\Rightarrow C=3\,. \end{aligned}$$

In diesem Fall haben wir aber nur zwei Nullstellen und drei zu bestimmenden Koeffizienten. Wir erhalten

$$3x^2+2x-2=x^2+x+1+(Bx+3)(x-1)=x^2(B+1)+x(4-B)-2\,,$$

und jetzt ist es klar, dass $B=2$ sein muss. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} &= \int \frac{dx}{x-1}+\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx\\ &=\log|x-1|+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\int\frac{2\,dx}{x^2+x+1}\\ &=\log|x-1|+\log(x^2+x+1)+\int\frac{2\,dx}{x^2+x+1}\,.\end{aligned}$$

Um das unbestimmte Integral $\int \frac{2\,dx}{x^2+x+1}$ zu berechnen, schreiben wir

$$\frac{2}{x^2+x+1}=\frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,.$$

Mit der Substitution $u:=x+\frac{1}{2}$ ist $du=dx$, sodass, mit $\alpha:=\sqrt{3}/2$,

$$\int\frac{2}{x^2+x+1}=\int\frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\int\frac{du}{u^2+\alpha^2}=\frac{2}{\alpha^2}\int\frac{du}{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2+1}\,.$$

Jetzt setzen wir $v := u/\alpha$, sodass $dv = du/\alpha$ und

$$\int \frac{2\,dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\alpha^2}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{2}{\alpha^2}\int \frac{\alpha\,dv}{v^2+1} = \frac{2}{\alpha}\int \frac{dv}{v^2+1}$$
$$= \frac{2}{\alpha}\arctan v + C = \frac{2}{\alpha}\arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right) + C = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + C$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \log(|x-1|(x^2+x+1)) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

□

(IV) *Der Nenner entält einen Faktor* $(x^2+bx+c)^p$ *mit* $b^2-4c<0$ *und* $p>1$.

Beispiel 6.34. Wir möchten das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$$

berechnen.

Wir schreiben

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)^2}$$

sodass wir A, B, C, D und E mit

$$x^4-x^3+2x^2-x+2 = A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)$$

finden müssen. Eine änhliche aber lästiger Berechnung wie oben zeigt, dass

$$A = \frac{1}{3} \quad B = \frac{2}{3} \quad C = -\frac{1}{3} \quad D = -1 \quad \text{und } E = 0\,.$$

daraus folgt, dass

$$\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} + C\,.$$

□

ZUSAMMENFASSUNG: Um das Integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

mit $\operatorname{gr}(p(x)) < \operatorname{gr}(q(x))$ zu berechnen, müssen wir lernen die folgenden Integralen zu berechnen:

$$1.\ \int \frac{dx}{(x+a)^n} \qquad 2.\ \int \frac{x\,dx}{(x^2+bx+c)^m} \qquad 3.\ \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}\,,$$

wobei $b^2 - 4a < 0$.

1. Dieses Integral kann direkt berechnet werden:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} \log|x+a| + C & n = 1 \\ \frac{1}{n-1}(x+a)^{1-n} + C & n > 1\,. \end{cases}$$

Um 2. und 3. zu berechnen, schreiben wir

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = u^2 + \alpha^2\,,$$

wobei

$$u := x + \frac{b}{2} \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}\,. \tag{6.13}$$

Mit dieser Substitution (vorsichtig: α is nur eine Konstante!) ist

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+bx+c)^m} = \int \frac{u\,du}{(u^2+\alpha^2)^m} - \frac{b}{2}\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} \tag{6.14}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m} = \int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}\,.$$

Daraus folgt, dass, um die Stammfunktionen in 2. und 3. zu finden, ist es dann genug die zwei Integrale

$$2'.\ \int \frac{u\,du}{(u^2+\alpha^2)^m} \quad \text{und} \quad 3'.\ \int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}$$

zu berechnen.

2'. Dieses Integral kann jetzt direkt berechnet werden:

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+\alpha^2)^m} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(u^2+\alpha^2) + C & m = 1 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{1-m}(u^2+\alpha^2)^{1-m} + C & m > 1\,. \end{cases} \tag{6.15}$$

3'. Falls $m = 1$, gilt

$$\int \frac{du}{u^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right) + C\,. \tag{6.16}$$

Falls $m > 1$, benutzen wir die Methode der partiellen Integration. Wir setzen

$$f(u) = \frac{1}{(u^2+\alpha^2)^m} \qquad \text{und} \qquad g'(u) = 1$$

so, dass

$$f'(u) = -m\frac{2u}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}} \qquad \text{und} \qquad g(u) = u\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} &= \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} + 2m\int \frac{u^2\,du}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}} \\
&= \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} + 2m\int \frac{u^2+\alpha^2}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}}\,du - 2m\alpha^2\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}} \\
&= \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} + 2m\int \frac{1}{(u^2+\alpha^2)^m}\,du - 2m\alpha^2\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}}\,.
\end{aligned}$$

Das Integral an der linken Seite und das Integral in der Mitte der rechten Seite sind gleich. Wir können deshalb schreiben

$$2m\alpha^2\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}} = \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} - (1-2m)\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}$$

Wir können die ganze Gleichung durch $2m\alpha^2$ dividieren. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m+1}} &= \frac{1}{2m\alpha^2}\frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} - \frac{1-2m}{2m\alpha^2}\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} \\
&= \frac{1}{2m\alpha^2}\frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m} + \frac{2m-1}{2m\alpha^2}\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m}\,.
\end{aligned}$$

Durch eine Verschiebung der Exponenten $m \rightsquigarrow m-1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} \\
&\quad = \frac{1}{2(m-1)\alpha^2}\frac{u}{(u^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)\alpha^2}\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m-1}}\,.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Mithilfe von (6.13) folgt es aus (6.16) und (6.17), dass

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m} \\
&\quad = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C & m = 1 \\ \frac{2}{(m-1)(4c-b^2)}\frac{x+2b}{(x^2+bx+c)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4c-b^2)}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{m-1}} & m > 1\,, \end{cases}
\end{aligned}}$$

und mithilfe von (6.14), (6.13), (6.17) und (6.15), dass

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{x\,dx}{x^2+bx+c}\\ &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)+\frac{1}{2}\log(x^2+bx+c)+C & m=1\\ \frac{2}{(m-1)(4c-b^2)}\frac{x+2b}{(x^2+bx+c)^{m-1}}+\frac{2(2m-3)}{(m-1)(4c-b^2)}\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^{m-1}}+\frac{1}{2(m-1)}(x^2+bx+c)^{1-m}+C & m>1\,.\end{cases}\end{aligned}}$$

Vorsicht. Es macht keinen Sinn, diese Formel auswendig zu lernen. Was viel wichtiger ist, ist die Technik (und die Tricks) zu lernen, die wir benutzt haben.

6.4.3.1. *Weitere Integrale.* Eine rationale Funktion ist ein Quotient von zwei Polynomen. Eine Funktion von zwei Variablen x, y und der Forme

$$P(x,y)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=0}^{q}a_{m,n}x^my^n$$

heisst ein Polynom in zwei Variablen. Ein Quotient von zwei Polynomen (in zwei Variablen) ist eine rationale Funktion (in zwei Variablen).

Mit einer geeigneten Substitution werden wir einige Integrale als Integrale einer rationalen Funktion schreiben.

(1) Sei R eine rationale Funktion. Mit der Substitution $u := e^t$ können wir das Integral $\int R(e^t)\,dt$ verinfachern. In der Tat, falls $u = e^t$ ist $du = e^t\,dt$, sodass

$$\int R(e^t)\,dt=\int R(u)\frac{1}{u}\,du$$

und wir können dieses Integral mithilfe der Partialbruchzerlegung lösen. Da $\cosh t$ und $\sinh t$ lineare Kombinationen von e^t sein, können wir auch

$$\int R(\cosh t,\sinh t)\,dt$$

umformen, um eine rationale Funktion von e^t zu haben.

Beispiel 6.35. Wir suchen die Stammfunktion

$$\int\frac{dt}{\cosh t}\,.$$

Seit

$$\frac{1}{e^t+e^{-t}}=\frac{e^t}{e^{2t}+1}$$

und mithilfe der Substitution $u := e^t$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{\cosh t}&=\int\frac{2}{e^t+e^{-t}}\,dt=2\int\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt\\ &=2\int\frac{du}{u^2+1}=2\arctan u+C=2\arctan(e^t)+C\,.\end{aligned}$$

$\square$

(2) Wir betrachten jetzt die Stammfunktion

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx\,, \tag{6.18}$$

wobei R eine rationale Funktion ist. In diesem Fall setzen wir $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Daraus folgt, dass $x = 2\arctan u$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2u}{1+u^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos x &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 2\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} - 1 = 2\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1\\
&= 2\frac{1}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 6.36. Wir möchten das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

berechnen. Mit der obigen Berechnungen erhalten wir

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{2u+1-u^2}\,,$$

sodass

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\cancel{1+u^2}}{2u+1-u^2}\frac{2}{\cancel{1+u^2}}\, du = 2\int \frac{-du}{(u-a)(u-b)}\,,$$

wobei

$$a = 1+\sqrt{2} \quad \text{und} \quad b = 1-\sqrt{2}\,, \quad \text{sodass} \quad a-b = 2\sqrt{2}\,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right) du = \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{u-a}{u-b}\right| + C\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= -2\int \frac{du}{(u-a)(u-b)} = \frac{2}{a-b}\log\left|\frac{u-b}{u-a}\right| + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}}\right| + C\,.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, bemerken wir, dass $\sqrt{2} - 1 = \tan\frac{\pi}{8}$. Daraus folgt, dass

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\frac{\pi}{8}\,.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2} &= (\sqrt{2}+1)\left((\sqrt{2}-1)\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \\ &= (\sqrt{2}+1)\left(\tan\frac{\pi}{8}\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\,,\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}}\right| &= \left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}\right|\frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,,\end{aligned} \tag{6.20}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$.

Aus (6.19) und (6.20) schliessen wir

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}}\right| + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + \log\frac{1}{\sqrt{2}+1} + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C'\,.\end{aligned}$$

□

(3) Falls wir die Stammfunktion

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx \tag{6.21}$$

finden möchten, sollten wir die Substitution $x := a\sin t$ machen. In diesem Fall ist $dx = a\cos t\,dt$ und das Integral in (6.21) in ein Integral der Forme (6.18) umgeformt werden wird.

Beispiel 6.37. Mit $x = \sin t$, erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin x + C\,. \quad \square$$

Beispiel 6.38. Wir möchten das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x\, dx}{4 - x^2 + \sqrt{4-x^2}}$$

finden. Mithilfe der Substitution $x = 2\sin t$, und $dx = 2\cos t\, dt$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\, dx}{4 - x^2 + \sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\sin t\ 2\cos t\, dt}{4 - 4\sin^2 t + \sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \\
&= \int \frac{4\sin t \cos t\, dt}{4\cos^2 t + 2\cos t} = \int \frac{2\sin t\, dt}{2\cos t + 1} \\
&= -\log|2\cos t + 1| + C \\
&= -\log|2\sqrt{4-x^2} + 1| + C\,.
\end{aligned}$$

6.5. Uneigentliche Integrale

Bis jetzt haben wir das Integral einer beschränkten Funktion f auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ betrachten. Jetzt möchten wir unsere Definition verallgemeinern. Wir werdern deshalb zwei verschiedene Verallgemeinerungen des "eigentlichen" Integrals betrachten:

- das *uneigentliche Integral der ersten Art*, wobei wir eine beschränkten Funktion auf einem unbeschränkten Intervall $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$ integrieren.
- das *uneigentliche Integral der zweiten Art*, wobei wir eine unbeschränkten Funktion auf einem beschränkten Intervall integrieren.

6.5.1. Uneigentliches Integral der ersten Art.

Definition 6.39. Nehmen wir an, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

für jedes $b \geq a$ existiert. Dann setzen wir

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

und wir sagen, dass

(1) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konvergiert*, falls $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existiert und ist endlich;
(2) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *divergiert*, falls $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \infty$ oder $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ existiert nicht.

Bemerkung 6.40. (1) Wir benutzen die Schreibweise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ auch wann das uneigentliche Integral divergent ist.
(2) Die Definitionen des uneigentlichen Integrals und der (undendlichen) Reihe sind ähnlich. Die Funktion
$$b \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$
spielt die Rolle der partiellen Summen
$$n \mapsto \sum_{k=0}^n a_n$$
einer Reihe.

Beispiel 6.41. Wir beweisen, dass
$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$$
konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$. In diesem Fall ist
$$\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}\,.$$
In der Tat gilt für jedes $b > 1$
$$\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \log b & \alpha = 1 \\ \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1\,. \end{cases}$$
Da $\lim_{b\to\infty} \log b = \infty$ und
$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \alpha < 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1, \end{cases}$$
haben wir die Behauptung verifiziert. □

Man kann auch ähnlich die Definition
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
geben.

Definition 6.42.
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$
für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert* genau dann, wenn beide $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\infty f(x)\,dx$ konvergieren.

Bemerkung 6.43. Da die Funktion f beschränkt sein muss, ist $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ unabhänging von c.

Vorsicht. Wegen der Definition ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx!!! \tag{6.22}$$

Das folgende Beispiel erläutert warum (6.22) gilt.

Beispiel 6.44. Laut des Beispiels 6.41 ist $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ divergent, weil $\alpha = 1$. Aber

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx = 0\,,$$

weil $f(x) = x$ eine gerade Funktion ist.

Beispiel 6.45. Wir möchten zeigen, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx$$

konvergiert, falls $\alpha > 0$. In der Tat, falls $b > 0$ ist

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-\alpha|x|}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-\alpha b}-1}{-\alpha} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha} & \alpha > 0\\ \infty & \alpha < 0\,.\end{cases}$$

Daraus folgt, dass, falls $\alpha > 0$,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,.$$

Anderseite ist

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{-\alpha|x|}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{\alpha x}\,dx = -\lim_{b\to\infty}\int_{b}^{0} e^{-\alpha t}\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-\alpha t}\,dt = \begin{cases}\frac{1}{\alpha} & \alpha > 0\\ \infty & \alpha < 0\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = \begin{cases}\frac{2}{\alpha} & \alpha > 0\\ \infty & \alpha \le 0\,.\end{cases}$$

Wir merken auch, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx$$

für jedes α divergent ist. In der Tat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx\,.$$

Falls $\alpha > 0$ ist $\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x}\,dx$ offensichtlich divergent, weil die Funktion $\lim_{x\to-\infty} e^{-\alpha x} = \infty$; falls $\alpha < 0$ ist $\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ divergent, weil die Funktion $\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} = \infty$. $\square$

Satz 6.46. (1) *Nehmen wir an, dass es ein $C > 0$, ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha > 1$ gibt so, dass*

$$|f(x)| \le \frac{C}{x^\alpha}\,, \qquad \text{für jedes } x \ge x_0\,.$$

Dann ist

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergent. In diesem Fall sagen wir, dass das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergent *ist.*

(2) *Falls es ein $C > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt so, dass*

$$f(x) \ge \frac{C}{x}\,, \qquad \text{für jedes } x \ge x_0\,,$$

ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

divergent.

Wir haben hier benutzt, dass

(1) falls $f(x) \le g(x)$ und

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \ \text{ konvergiert, konvergiert auch } \int_a^\infty f(x)\,dx\,;$$

(2) falls $f(x) \ge g(x)$ und

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \ \text{ divergiert, divergiert auch } \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Beispiel 6.47. Aus dem Satz 6.46 folgt, dass

$$\int_1^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt$$

für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergent ist. In der Tat wächst $t \mapsto e^t$ viel schneller als $t \mapsto t^{\lambda+2}$. Daraus folgt, dass es $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $e^t > t^{\lambda+2}$ für jedes $t \ge t_0$. Da $t > 0$ ist, aus $e^t > t^{\lambda+2}$ für jedes $t \ge t_0 > 1$ folgt, dass

$$t^{-2} > t^\lambda e^{-t}\,.$$

Aus dem Beispiel 6.41 folgt, dass

$$\int_1^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt \quad \text{konvergiert, und} \quad \int_1^\infty t^\lambda e^{-t}\,dt < \int_1^\infty t^{-2}\,dt\,.$$

Beispiel 6.48. Wir möchten die Konvergenz oder Divergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{3/2}}\,dt$$

untersuchen. Hier ist

$$\frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{t^2\left(1+\frac{4}{t^2}\right)}{(t^2)^{3/2}\left(\frac{1}{t^2}+4\right)^{3/2}} = \frac{1}{t}\frac{1+\frac{4}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+4\right)^{3/2}}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1+\frac{4}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+4\right)^{3/2}} = \frac{1}{8}\,.$$

Wegen der Definition eines Limes, für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $t_0 > 0$ so, dass für jedes $t > t_0$

$$\left|\frac{1+\frac{4}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+4\right)^{3/2}} - \frac{1}{8}\right| < \epsilon$$

ist. Falls wir $\epsilon = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$ nehmen, erhalten wir, dass es $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt so, dass

$$\frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{t}\frac{1+\frac{4}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^2}+4\right)^{3/2}} \geq \frac{1}{9t}\,.$$

Da $\int_0^\infty \frac{dt}{t}$ divergiert, ist das Integral $\int_0^\infty \frac{t^2+4}{(1+4t^2)^{3/2}}\,dt$ auch divergent.

6.5.2. Uneigentliches Integral der zweiten Art.

Definition 6.49. Nehmen wir an, dass f auf dem Intervall $(a,b]$ definiert ist und dass das Integral

$$\int_x^b f(t)\,dt$$

für jedes x mit $a < x \leq b$ existiert. Dann setzen wir

$$\int_{a^+}^b f(t)\,dt := \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$$

und wir sagen, dass:

(1) das Integral $\int_{a^+}^b f(t)\,dt$ *konvergiert*, falls $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$ existiert und $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt < \infty$;
(2) das Integral $\int_{a^+}^b f(t)\,dt$ *divergiert*, falls $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$ nicht existiert oder $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt = \infty$.

Wir werden oft einfach $\int_a^b f(t)\,dt$ schreiben, auch wenn das Integral ein uneigentliches Integral des zweiten Art ist.

Bemerkung 6.50. Die Funktion f muss nicht unbedingt auf der Stelle $x = a$ beschränkt sein, damit das Integral $\int_{a^+}^b f(t)\,dt$ konvergiert.

Beispiel 6.51. Sei $f(t) := t^{-\alpha}$ für $t > 0$. Falls $d > 0$ und $x > 0$ ist

$$\int_x^d t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \log d - \log x & \alpha = 1 \\ \frac{d^{1-\alpha}-x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass

$$\int_{0^+}^d t^{-\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^d t^{-\alpha}\,dt$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 1$. In der Tat ist

$$\int_{0^+}^d t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \infty & \alpha \geq 1 \\ \frac{d^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1\,. \end{cases} \tag{6.23}$$

Um den Vergleich mit dem Beispiel 6.41 zu machen, schreiben wir explizit den Fall $d = 1$

$$\int_{0^+}^1 t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \infty & \alpha \geq 1 \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha} & \alpha < 1\,. \end{cases} \tag{6.24}$$

Mann könnte auch das Verhalten des Integrales in (6.23) auch mit einer anderen Methode bestimmen. Mit der Substitution $t = u^{-1}$ und $dt = -u^{-2}\,du$ erhalten wir

$$\int_x^d t^{-\alpha}\,dt = -\int_{1/x}^{1/d} u^{\alpha-2}\,du = \int_{1/d}^{1/x} u^{\alpha-2}\,du\,.$$

Falls $x \to 0^+$, strebt x^{-1} nach ∞: daraus folgt, dass

$$\int_{0^+}^d t^{-\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^d t^{-\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_{1/d}^{1/x} u^{\alpha-2}\,du = \int_{1/d}^{\infty} u^{\alpha-2}\,du$$

und wir haben schon gesehen, dass dieses Integral konvergiert genau dann, wenn $\alpha - 2 < -1$, oder $\alpha < 1$.

Bemerkung 6.52. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir haben gesehen, dass

$$\int_{0^+}^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert } \Leftrightarrow \alpha < 1$$

und

$$\int_c^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Wir werden sehen, dass eine ähnlich Behauptung gilt auch in Dimensionen n. In diesem Fall die Grenze für die Konvergenz oder Divergenz wird $\alpha > n$ oder $\alpha < n$.

Bemerkung 6.53. (1) Analog kann man auch $\int_a^{b^-} f(t)\,dt$ definieren. Daraus folgt, dass

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,dt = \int_{a^+}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{b^-} f(t)\,dt$$

konvergiert genau dann, wenn beide Integrale konvergieren.

(2) Falls f auf $[a,b]$ ausserhalb $c \in (a,b)$ definiert ist, ist

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^{c^-} f(t)\,dt + \int_{c^+}^{b} f(t)\,dt$$

und das Integral konvergiert genau dann, wenn beide Integrale an der rechten Seite konvergieren.

Beispiel 6.54. Sei $a < b$. Das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

ist ein Integral der zweiten Art. Wir können das Integral direkt berechnen, oder wir können mithilfe des Satzes 6.55 seine Konvergenz bestimmen.

Wir fangen mit der direkten Methode an. Der Graph der Funktion $x \mapsto (b-x)(x-a)$ ist eine Parabel der Forme

Wir werden eine Substitution finden so, dass der Graph die Parabel $x \mapsto x^2 - 1$ wird.

Der Grund ist, dass

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + C\,.$$

Darum suchen wir $x(t) = \alpha t + \beta$ so, dass $x(-1) = a$ und $x(1) = b$:

$$\begin{cases} a = -\alpha + \beta \\ b = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b-a}{2} \\ \beta = \frac{b+a}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\,. \tag{6.25}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(b-x)(x-a) &= \left(b - \frac{b-a}{2}t - \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} - a\right)\\ &= \left(\frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2}t\right)\left(\frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (1-t^2)\,.\end{aligned}$$

Da $dx = \frac{b-a}{2}\,dt$, $x(a) = 1$ und $x(b) = -1$, schliessen wir

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} &= \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2}\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2(1-t^2)}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \lim_{a\to -1^+}\int_a^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \lim_{a\to-1^+} \arcsin t\big|_a^0 + \lim_{b\to 1^-} \arcsin t\big|_0^b\\ &= \arcsin 1 - \arcsin(-1)\\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\,.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.55. (1) *Nehmen wir an, dass es $C > 0, t_0 > 0$ und $\beta < 1$ gibt so, dass*

$$0 \le f(t) \le \frac{C}{t^\beta} \qquad \text{für } 0 < t < t_0\,.$$

Dann ist

$$\int_{0^+}^b f(t)\,dt \qquad \textit{konvergent.}$$

(2) *Falls es ein $C > 0$ und $t_0 > 0$ gibt so, dass*

$$f(t) \ge \frac{C}{t} \qquad \text{für } 0 < t < t_0\,,$$

ist

$$\int_{0^+}^b f(t)\,dt \qquad \textit{divergent.}$$

Beispiel 6.56. Sei $a < b$. Wir haben schon das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

berechnet. Wir möchten aber jetzt die Konvergenz mithilfe des Satzes 6.55 bestimmen.

Falls $d := \frac{a+b}{2}$, schreiben wir

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)((x-a)}} = \int_{a^+}^d \frac{dx}{\sqrt{(b-x)((x-a)}} + \int_d^{b^-} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)((x-a)}}\,.$$

Um die Konvergenz des Integrals

$$\int_{a^+}^d \frac{dx}{\sqrt{(b-x)((x-a)}} \tag{6.26}$$

zu bestimmen, bemerken wir, dass

(1) falls $x \leq \frac{a+b}{2} =: d$, ist $b - x \geq b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} =: c$. Daraus folgt, dass für $a < x \leq \frac{a+b}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{c(x-a)}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{(x-a)^{1/2}}\,.$$

Da $\frac{1}{2} < 1$ ist, ist

$$\int_{a^+}^d \frac{dx}{(x-a)^{1/2}}$$

konvergent und (6.26) konvergiert auch.

(2) Falls $d = \frac{a+b}{2} \leq x$, ist $x - a \geq \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} = c$. Falls $\frac{a+b}{2} \leq x \leq b$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)((x-a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(b-x)c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{(b-x)^{1/2}}$$

und analog wie in (1) folgt die Konvergenz des Integrals

$$\int_d^{b^-} \frac{dx}{\sqrt{(b-x)((x-a)}}$$

Anwendung. Wir definieren die *Gammafuntkion*

$$\Gamma(\alpha) := \int_{0^+}^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$$

und wir möchten zuerst beweisen, dass $\Gamma(\alpha)$ konvergent ist. Wegen der Definition ist

$$\int_{0^+}^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt = \int_{0^+}^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt$$

und wir haben schon in Beispiel 6.47 gesehen, dass

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert. Um die Konvergenz von $\int_{0^+}^1 e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$ zu bestimmen, setzen wir $t := u^{-1}$ so, dass $dt = -u^{-2}\, du$. Falls $0 < x \leq 1$, ist

$$\int_x^1 e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt = -\int_{1/x}^1 e^{-1/u} u^{1-\alpha} u^{-2}\, du = \int_1^{1/x} 1 e^{-1/u} u^{-1-\alpha}\, du\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\int_{0^+}^1 e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt = \int_1^\infty e^{-1/u} u^{-1-\alpha}\, du \leq \int_1^\infty u^{-1-\alpha}\, du$$

und $\int_1^\infty u^{-1-\alpha}\, du$ konvergiert, falls $\alpha > 0$.

Lemma 6.57. (1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ *für jedes* $\alpha > 0$*;*
(2) $\Gamma(n+1) = n!$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (1) Mit der partiellen Integration mit $f(t) = t^\alpha$ und $g'(t) = e^{-t}$ ist

$$\int t^\alpha e^{-t}\, dt = -t^\alpha e^{-t} + \alpha \int t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_{0^+}^\infty t^\alpha e^{-t}\, dt = \int_{0^+}^1 t^\alpha e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^\alpha e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^\alpha e^{-t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_1^b t^\alpha e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(-t^\alpha e^{-t}\Big|_x^1 + \alpha \int_x^1 t^\alpha e^{-t}\, dt \right) + \lim_{b\to\infty} \left(-t^\alpha e^{-t}\Big|_1^b + \alpha \int_1^b t^\alpha e^{-t}\, dt \right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-t^\alpha e^{-t})|_x^1 + \lim_{b\to\infty} (-t^\alpha e^{-t})|_1^b + \alpha\Gamma(\alpha) \\
&= -e^{-1} + e^{-1} + \alpha\Gamma(\alpha)\,.
\end{aligned}$$

(2) Weiter ist

$$\Gamma(1) = \int_{0^+}^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1 = 0!\,.$$

Nehmen wir an, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ und beweisen wir, dass $\Gamma(n+1) = n!$. In der Tat folgt aus (1), dass

$$\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n) = (n+1)n! = (n+1)!\,. \quad \square$$

Wir haben so eine Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ der Funktion Fakultät gefunden. Es sollte aber bemerket werden, dass die Gammafunktion keine Darstellung als eine elementare Funktion für jedes $\alpha > 0$ besitzt.

6.6. Differentialgleichungen, II

Als eine Anwendung der Integration, werden wir mehr über die Differentialgleichungen sprechen. Bis jetzt haben wir nur lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Eulersche Gleichung betrachten. Jetzt werden wir uns mit Differentialgleichungen deren Koeffizienten nicht unbedingt konstante sind beschäftigen; im nächsten Abschnitt werden wir Differentialgleichungen sehen, die nicht unbedingt lineare sind.

6.6.1. Lineare Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Wir betrachten die Differentiagleichung

$$y' + P(x)y = Q(x)\,, \tag{6.27}$$

wobei P und Q gegeben sind. Wir nehmen an, dass P und Q stetig auf einem Intervall I (endlich oder unendlich) sind und wir betrachten zuerst die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$y' + P(x)y = 0\,. \tag{6.28}$$

Falls $y(x) \neq 0$ auf I ist, können wir

$$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

schreiben und integrieren. Wir erhalten deshalb

$$y(x) = e^{-A(x)}\,,\ \text{wobei } A(x) = \int P(x)\,dx - C\,. \tag{6.29}$$

Das heisst, dass, falls es eine positive Lösung der Differentialgleichung (6.28) gibt, die Lösung muss der Forme (6.29) sein. Man kann aber auch verifizieren, dass jede Lösung der Differentialgleichung in (6.28) der Forme (6.29) für eine beliebige Konstante sein muss. In der Tat, werden wir jetzt verifizieren, dass jede Lösung der Anfangswertproblem

$$y' + P(x)y = 0\,,\ \text{mit } y(x_0) = b \tag{6.30}$$

der Forme

$$y(x) = be^{-A(x)}\,,\ \text{wobei } A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt \tag{6.31}$$

sein muss.

Es ist einfach zu sehen, dass (6.31) eine Lösung von (6.30) ist: aus $A(x_0) = 0$ folgt, dass $y(x_0) = b$; weiter ist $y'(x) = be^{-A(x)}A'(x)$, wobei $A'(x) = P(x)$. Um die obige Behauptung zu verifizieren, nehmen wir eine beliebige Lösung $g(x)$ von (6.30). Wir möchten zeigen, dass $g(x) = be^{-A(x)}$, d.h. $g(x)e^{A(x)} = b$. Sei $h(x) := g(x)e^{A(x)}$. Wir schauen, dass h eine Konstante ist. Es gilt

$$h'(x) = g'(x)e^{A(x)} + g(x)e^{A(x)}A'(x) = e^{A(x)}[g'(x) + g(x)P(x)]\,. \tag{6.32}$$

Da g eine Lösung des Anfangwertproblems (6.30) ist, ist $g'(x) + g(x)P(x) = 0$. Daraus folgt, dass $h'(x) = 0$ aus I, und deshalbd ist h eine Konstante. Dann ist $h(x) = h(x_0) = g(x_0) = b$ und deshalb ist $g(x) = be^{-A(x)}$.

Mit der gleichen Methode suchen wir jetzt die Lösung der Anfangswerproblems

$$y' + P(x)y = Q(x)\,, \text{ mit } y(x_0) = b\,. \tag{6.33}$$

Nehmen wir an, dass $g(x)$ eine beliebige Funktion ist, die (6.33) erfüllt. Wir setzen

$$h(x) = g(x)e^{A(x)}$$

und aus (6.32) erhalten wir, dass

$$h'(x) = e^{A(x)}[g'(x) + g(x)P(x)] = e^{A(x)}Q(x).$$

Wegen der zweiten Fundamental Satzes der Infinitesimanrechnung, können wir diese Gleichung zwischen x_0 und x integrieren so, dass

$$h(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}Q(t)\,dt\,.$$

Aus $h(x_0) = g(x_0)$ folgt, dass $g(x)$ der Forme

$$g(x) = e^{-A(x)}h(x) = g(x_0)e^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{A(t)}\,dt$$

ist. Wir haben deshalb den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.58. *Seien P, Q zwei Funktionen, die stetig auf einem Intervall I sind, sei $x_0 \in I$ und $b \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Es gibt genau eine Lösung des Anfangswertproblems* (6.33) *auf dem Intervall I. Diese Lösung hat die Forme*

$$y(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{A(t)}\,dt\,,$$

wobei $A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt$.

Beispiel 6.59. Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$xy' + (1-x)y = e^{2x} \text{ mit } y(1) = y_0$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$. Falls eine Lösung einen endlichen Limes für $x \to 0$ besitzt, möchten wir auch diesen Limes bestimmen.

Um die Formel im Satz 6.58 zu benutzen, müssen wir die Differentialgleichung in die Forme $y' + P(x)y = Q(x)$ umformen. Wir dividieren deshalb durch x und erhalten

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = \frac{e^{2x}}{x}\,,$$

sodass

$$P(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{und} \quad Q(x) = \frac{e^{2x}}{x}\,.$$

Da die Funktionen P und Q auf $(0,\infty)$ stetig sind, gibt es wegen des Satzes 6.58 eine einzige Lösung $y(x)$, die eine Anfangsbedingung $y(1) = y_0$ erfüllt. Wir berechnen zuerst

$$A(x) = \int_1^x P(t)\,dt = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - 1\right)\,dt = \log x - (x-1)\,,$$

sodass

$$e^{-A(x)} = e^{x-1-\log x} = \frac{e^{x-1}}{x} \text{ und } e^{A(t)} = te^{1-t}\,.$$

Wegen des Satzes 6.58 lautet die Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x}\int_1^x \frac{e^{2t}}{t} te^{1-t}\,dt \\ &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x}\int_1^x e^{t+1}\,dt \\ &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x}}{x}\int_1^x e^{t}\,dt \\ &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x}}{x}(e^x - e) \\ &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x+1}}{x} \\ &= \frac{e^{2x} + Ce^x}{x}\,, \end{aligned}$$

wobei $C = y_0 e^{-1} - e$ ist.

Um das Verhalten der Lösungen für $x \to 0$ zu bestimmen, können wir die Exponentialfunktion mithilfe des linearen Taylorpolynoms in einer Umgebung des Ursprungs approximieren:

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x) \quad \text{ und } \quad e^x = 1 + x + o(x)$$

falls $x \to 0$. Wir erhalten deshalb

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1 + 2x + o(x) + C(1 + x + o(x))}{x} \\ &= \frac{(1+C) + (2+C)x + o(x)}{x} \\ &= \frac{1+C}{x} + (2+C) + o(1)\,. \end{aligned}$$

Wir schliessen darauf, dass die einzige Lösung, die einen endlichen Limes für $x \to 0$ besitzt, die Lösung mit $C = -1$ (d.h. $y_0 = (e-1)e$) ist. In diesem Fall ist der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1+C}{x} + (2+C) + o(1)\right]\Bigg|_{C=-1} = \lim_{x\to 0}(1 + o(1)) = 1\,.$$

6.6.2. Separierbare Differentialgleichungen.

DEFINITION 6.60. Sei $y' = f(x,y)$ eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Falls $f(x,y)$ als eine Funktion der Forme $f(x,y) = P(x)R(y)$ geschrieben werden kann, heisst die Differentialgleichung *separierbar*.

Zum Beispiel sind die Differentialgleichungen

$$y' = x^3\,, \quad y' = \sin y \log x \quad \text{oder} \quad y' = x/\tan y$$

separierbare.

Falls $R(y) \neq 0$ auf einem Intervall I ist, können wir beide Seiten der Differentialgleichung durch $R(y)$ dividieren und erhalten

$$A(y)y' = P(x)\,,$$

wobei $A(y) = 1/R(y)$. Nehmen wir an, dass beide Seiten $A(y)y'$ und $P(x)$ stetig sind, und sei G eine Stammfunktion von A auf I, d.h. $G' = A$. Dann ist

$$G(y) = \int P(x)\,dx + C$$

eine implizit Lösung der Differentialgleichung

$$y' = P(x)R(y)$$

auf dem Intervall I. In der Tat, falls $y(x)$ eine Lösung ist, ist

$$A(y(x))y'(x) = P(x)$$

für jedes $x \in I$. Da $G' = A$, können wir schreiben

$$G'(y(x))y'(x) = P(x)\,, \tag{6.34}$$

wobei der Term $G'(y(x))y'(x)$ die Ableitung der Verkettung $G(y(x))$ ist. Daraus folgt, dass P eine Stammfunktion von $G(y(x))$ ist, d.h.

$$G(y(x)) = \int P(x)\,dx + C\,.$$

Falls wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = P(x)R(y) \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

suchen, integrieren wir (6.34) zwischen x_0 und x

$$\int_{x_0}^{x} G'(y(t))y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\,.$$

Mithilfe der Substitution $y(t) = y$, sodass $y'(t)\,dt = dy$, geht diese Gleichung über in

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} A(y)\,dy = \int_{y(x_0)}^{y(x)} G'(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\,. \tag{6.35}$$

Aus dieser Methode, kann man das folgende Rezept für die Behandlung von separierbaren Differentialgleichungen:

(1) Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = P(x)R(y)\,.$$

(2) Wir trennen ("separieren") formal die Variablen:

$$\frac{1}{R(y)}\,dy = P(x)\,dx\,.$$

(3) Wir integrieren links nach y, rechts nach x, und zwar:
   – unbestimmt, falls nach der allgemeinen Lösung gefragt ist. Dabei erscheint eine Integrationskonstante;
   – links von y_0 bis y, rechts von x_0 bis x, falls die durch (x_0, y_0) gehende Lösung verlangt ist (d.h. die Lösung, die die Bedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt).

(4) Wir lösen nach y auf, wenn wir können.

Beispiel 6.61. Die nicht-lineare Differentialgleichung

$$xy' + y = y^2$$

ist separierbar. In der Tat können wir die Differentialgleichung so umformen:

$$xy' + y = y^2 \Rightarrow xy' = y^2 - y = y(y-1) \Rightarrow \frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}\,,$$

falls $x \neq 0$ und $y(y-1) \neq 0$. Die Funktionen $y \equiv 0$ und $y \equiv 1$ sind Lösungen. Die nicht konstante Lösungen müssen die Gleichung

$$\frac{y'}{y(y-1)} = \frac{1}{x}$$

erfüllen. Wir können diese Gleichung integrieren und erhalten

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Mit der Methode der Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\log|y-1| - \log|y| = \log|x| + C'\,, \tag{6.36}$$

wobei C' die Integrationskonstante bezeichnet. Die Gleichung (6.36) wird

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = |x|e^{C'}$$

oder

$$\frac{y-1}{y} = Cx\,,$$

wobei C noch eine Konstante ist. Wir bemerken, dass die Konstante C nicht unbedingt positiv ist, da wir der Absolutbetrag nicht mehr geschrieben haben (in der Tat ist $C = \pm e^{C'}$). Wir können die letze Gleichung nach y auflösen und erhalten

$$y = \frac{1}{1 - Cx} .$$

$\square$

Beispiel 6.62. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

im Quadrat $Q := (-1,1) \times (-1,1) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die allgemeine Lösung und die Lösung die der Bedingung $y(-1/2) = \sqrt{3}/2$ genügt.

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Um die allgemeine Lösung zu finden, integrieren wir das unbestimmt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, dx .$$

Es ergibt sich

$$\arcsin y = \arcsin x + C , \tag{6.37}$$

wobei C eine Konstante ist. Mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + C) = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C \\ \Rightarrow &(y - x\cos C)^2 = (1-x^2)\sin^2 C \\ \Rightarrow &x^2 - 2xy\cos C + y^2 = \sin^2 C . \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$x^2 - 2xy\cos C + y^2 = \sin^2 C \tag{6.38}$$

ist die allgemeine Formel der Lösung, d.h. für jedes C ist $x^2 - 2xy\cos C + y^2 = \sin^2 C$ die implizite Forme einer Lösung.

Um die Lösung durch den Punkt $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ zu finden, konnten wir einfach $x = -1/2$ und $y = \sqrt{3}/2$ in der Gleichung (6.38) ersetzen, nach C auflösen und der gefundenen Wert von C in (6.38) einsetzen. Wir möchten stattdessen die Methode mit der bestimmten Integration wie in (6.35) illustrieren:

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{y} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{-1/2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt .$$

Es ergibt sich

$$\arcsin y - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin x - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

und damit

$$\arcsin y - \arcsin x = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

die (6.37) mit $C = \frac{\pi}{2}$ ist. Aus (6.38) folgt, dass die Lösung durch den Punkt $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ der Kreisbogen

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ist. □