Cédric Villani reçoit le prix de la Société Mathématique Européenne

Alessio Figalli et Laurent Desvillettes

1 Parcours

Cédric Villani est agé de 35 ans, il est Professeur de mathématiques à l'ENS Lyon depuis 2000, après avoir été élève puis agrégé-préparateur à l'ENS Ulm. Il est membre de l'IUF (junior) depuis 2006.

Il a été Conférencier invité à l'ICM 2006, et a obtenu les distinctions suivantes:

1. Prix Louis-Armand (2001)
2. Cours Peccot (2003)
3. Harold Grad Lecture (2004)
4. Prix Jacques Herbrand (2007)
5. Prix de la SME (2008)

2 De la conjecture de Cercignani a l'hypocoercivité

L'analyse du comportement en temps long des systèmes dissipatifs (du type équations aux dérivées partielles ou équations intégrales) repose, lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle de Lyapounov H (ou entropie) qui prend son minimum en 0 (en un unique point appelé équilibre), et de sa dissipation D, sur des inégalités fonctionnelles (parfois dites de coercivité) du type

$$\forall f \in F, \qquad D(f) \geq \Phi(H(f)). \tag{1}$$

Ici, F est un ensemble (de fonctions) stable par le flot du système dissipatif considéré, et la vitesse de convergence vers l'équilibre de la solution $t \mapsto f(t)$ du système sera d'autant plus rapide que Φ a une forte croissance en 0.

On sait par exemple depuis les années 70 démontrer la convergence exponentiellement rapide vers l'équilibre de nombreuses équations paraboliques de type Fokker-Planck, grâce à l'inégalité de Sobolev logarithmique (dans (1), D est dans ce cas l'information de Fisher relative à une Gaussienne, et H l'information de Kullback relative à la même Gaussienne) [18].

La conjecture de Cercignani [3] consistait à obtenir (1) lorsque H et D étaient l'entropie et la dissipation d'entropie relatives au noyau de Boltzmann (avec une section efficace bien choisie), F étant l'ensemble des fonctions dont la masse, l'impulsion et l'énergie étaient fixés, et Φ étant une fonction linéaire.

Le noyau de Boltzmann (noté $Q(f)$) est un opérateur intégral non linéaire qui décrit l'effet des collisions élastiques binaires sur la distribution en vitesse des molécules dans un gaz raéfié monoatomique [7].

Bien que certains contre-exemples montraient que pour beaucoup de sections efficaces (incluant la plupart des sections efficaces rencontrées dans la physique) la conjecture ne pouvait pas être vraie [8], des résultats positifs se rapprochant de la conjecture furent obtenus tout au long des années 90, en particulier grâce aux travaux de E. Carlen et M.C. Carvalho (qui montrent que (1) est valable pour certains Φ dans le cas de l'opérateur de Boltzmann) [6], puis de L. Desvillettes et C. Villani, qui démontrent la conjecture pour le noyau de Landau (avec la section efficace des molécules Maxwelliennes) [11], et enfin de G. Toscani et C. Villani, qui démontrent (1) dans le cas du noyau de Boltzmann avec Φ "presque linéaire" dans le cas de sections efficaces réalistes [34].

La démonstration de ce dernier résultat est très surprenante et élégante, car elle utilise le résultat obtenu pour le noyau de Landau, ainsi que le flot de l'équation de Fokker-Planck linéaire (qui sont des objets faisant intervenir des dérivées) alors que les objets intervenant dans l'estimation finale sont purement intégraux.

Dans un article qui clarifie l'ensemble des approches précédentes, C. Villani montre enfin qu'en fait la conjecture de Cercignani est vérifiée dans le cas de sections efficaces particulières (non physiques), et qu'elle est "presque" vérifiée dans tous les cas d'intérêt physique [36].

Au début des années 2000, la preuve de la conjecture de Cercignani permettait de bien comprendre le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann spatialement homogène (i.-e. lorsque toutes les molécules d'un gaz raréfié ont la même distribution de vitesses en chaque point de l'espace). Par contre, le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann complète, qui s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{2}$$

où $f := f(t, x, v)$ est la densité de molécules d'un gaz raréfié (monoatomique) qui au temps t et au point x (dans un domaine borné) possèdent la vitesse v, restait presque complétement inconnu.

La méthode d'étude basée sur les inégalités de coercivité telles que (1) était inopérante pour des équations du type (2) car la dissipation d'entropie D ne contrôlait pas le comportement de f par rapport à la variable x. L'existence d'un équilibre unique était néanmoins assurée grâce à un calcul de H. Grad datant des années 60 [17], qui utilise de manière astucieuse le terme non coercif $v \cdot \nabla_x f$ (sauf dans des géométries très spécifiques liées à l'invariance Galiléenne). On se trouvait donc vis-à-vis du comportement en temps long dans une situation semblable à celle des opérateurs hypoelliptiques vis-à-vis de la régularité. Le terme d'hypocoercivité apparaîtrait peu après du fait ce cette analogie.

Un premier travail, réalisé par L. Desvillettes et C. Villani au début des années 2000 pour le cas très simplifié dans lequel Q était remplaçé par un opérateur du type Fokker-Planck (donc linéaire), permettait de mettre en place une méthode basée sur l'étude d'un système d'inéquations différentielles permettant d'obtenir la convergence "plus rapide que toute puissance négative" (ce que l'on note parfois $O(t^{-\infty})$) vers l'équilibre [12]. Ce travail a depuis été largement amélioré par B. Helffer et F. Nier ainsi que F. Hérau et F. Nier d'une part (qui ont développé des méthodes basées sur les Laplaciens de Witten) [20, 21], et C. Villani d'autre part (dans le cadre de la mise en place des bases de la théorie de l'hypocoercivité dans le cas linéaire) [35].

De nombreuses améliorations techniques ont permis au milieu des années 2000 d'obtenir un résultat équivalent de convergence en $O(t^{-\infty})$ vers l'équilibre dans le cas où Q est le véritable opérateur de Boltzmann, sous réserve que les solutions considérées soient régulières (par exemple pour les solutions perturbatives de Y. Guo) [14]. Ce résultat peut être vu comme une version quantitative des calculs de H. Grad, il utilise également une version raffinée des inégalités de Korn (qui relient la distance à une rotation rigide au gradient symétrisé d'un champs de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) [13]. L'interprétation physique de ce résultat est la suivante: un gaz raréfié (monoatomique) confiné dans une boîte (avec des conditions de réflexion spéculaire au bord) relaxe "plus rapidement que toute puissance négative" vers son état d'équilibre (une Maxwellienne indépendante du point de l'espace considéré sauf dans quelques cas non génériques que l'on peut décrire).

Les conditions dans lesquelles apparaît l'hypocoercivité ont depuis été formalisées par C. Villani [35] ainsi que par C. Mouhot et L. Neumann [28], en particulier dans le cadre linéaire. Le cas non-linéaire, beaucoup plus complexe, reste imparfaitement connu et continue de faire l'objet de recherches intenses. Il est à présent possible de se passer du système d'inéquations différentielles et de raisonner directement sur les opérateurs dont un certains nombre de propriétés abstraites doivent être vérifiées: il s'agit là d'une avancée cruciale que les travaux de C. Villani ont précipitée.

C. Villani a sans aucun doute joué un rôle décisif dans l'émergence de la théorie de l'hypocoercivité, qui dépasse maintenant largement le cadre des seules équations cinétiques. De même son apport avait été essentiel lors de l'établissement des inégalités de coercivité reliées à la conjecture de Cercignani dans les années 90. Enfin les questions d'entropie n'épuisent pas les contributions de C. Villani à la théorie cinétique: celui-ci a également marqué l'étude des questions de régularité et d'existence en particulier grâce à des articles en collaboration avec R. Alexandre, L. Desvillettes et B. Wennberg [2] d'une part, et R. Alexandre d'autre part [1].

3 Transport optimal

Aprés les travaux fondateurs de Brenier à la fin des années 80, le transport optimal a été un domaine de recherche très actif, dans lequel Cédric Villani a joué un rôle très important. Son intérêt s'est porté sur plusieurs points de la théorie.

Dans [30], en collaboration avec Otto, il s'est intéressé aux liens entre les équations de diffusion et le problème du transport, en essayant surtout d'utiliser le transport optimal et le point de vue de Otto (qui avait étudié les équations de la chaleur et des milieux poreux en les voyant comme un flot gradient par rapport a la distance de Wasserstein [29]) pour étudier des inégalités du type Sobolev (en particulier les inégalités de Sobolev logarithmique) et pour démontrer des résultats de convergence vers l'équilibre pour des équations aux dérivées partielles de type diffusion. Cet article a été un point de départ pour deux directions de recherche : d'abord c'est la première fois que des inégalités "de type Sobolev" (autres que l'isopérimétrique) apparaissent en connection avec le transport, et en un certain sens cet article a annoncé beaucoup des développements qui ont suivi par la suite. De plus, toujours pour la première fois, la courbure de Ricci apparaît dans le transport optimal. Ces lignes de recherche ont été toutes deux développées par Villani.

Dans un papier avec Cordero-Erausquin et Nazaret [10], il utilise le transport optimal pour démontrer des inégalités de Sobolev et Gagliardo-Nirenberg optimales sur $\mathbb{R}^n$. Cette approche, simple et efficace, permet aussi de traiter les cas d'égalité et peut être généralisée au cas où on change la norme Euclidienne en n'importe quelle autre norme sur $\mathbb{R}^n$.

Concernant les liens entre transport optimal et courbure de Ricci, Otto et Villani [30] et d'autres auteurs [9, 31] avaient montré que le transport optimal sur une variété (et plus particulièrement les propriétés des géodésiques dans l'espace des mesures de probabilité avec la distance de Wasserstein) avait un lien très fort avec la courbure de Ricci de la variété. Ce fait a été le point de départ pour Lott et Villani [26] et Sturm [32, 33] pour développer une théorie de la courbure de Ricci sur les espaces métriques (voir aussi [22]). L'idée est que des bornes par au dessous sur la courbure de Ricci peuvent être exprimées en terme de certaines inégalités de convexité pour des fonctionnelles sur l'espace de mesure de probabilité. Alors ces inégalités deviennent le point de départ pour définir une notion de courbure de Ricci $\geq K$ en dimension N (ce qui rappelle la notion de courbure-dimension à la Bakry-Émery). Cette notion est d'une part assez robuste pour être stable pour la convergence par Gromov-Hausdorff, et d'autre part assez forte pour démontrer des résultats non-triviaux, comme par exemple des inégalités de Sobolev, le théorème de Bishop-Gromov et aussi une version faible du théorème de Bonnet-Myers.

Plus récemment, Cédric Villani s'est intéressé à la régularité du transport optimal sur les variétés. En fait il est bien connu que la régularité du transport revient a étudier des équations du type Monge-Ampère, mais seulement récemment, après les papiers de Ma, Trudinger et Wang [27] et Loeper [23], on a découvert que : d'abord, la régularité du transport optimal sur une variété est très différente du cas de $\mathbb{R}^n$ et la géométrie de la variété joue un rôle important ; ensuite, pour avoir la régularité, une condition nécessaire et (presque) suffisante est qu'une certaine combinaison des dérivées quatrièmes de la distance ait un signe (maintenant cette condition est appelée "MTW-condition"). Cette condition assez mystérieuse impose des restrictions très fortes sur la variété : elle implique que la courbure sectionelle soit positive et dit aussi que la courbure ne peut pas "bouger trop vite". Un modèle de variété qui satisfait cette condition est la sphère n-dimensionnelle [24] et, en dimension 2, ses perturbations [15]. Cédric Villani s'est intéressé surtout à la stabilité de la condition de MTW, en montrant une stabilité "faible" de cette condition sous la convergence de Gromov-Hausdorff [39]. Enfin, dans un papier avec Loeper [25], il étudie les liens entre cette condition et la géométrie du cut-locus de la variété en arrivant a montrer que si une variété non-focale satisfait la condition de MTW, alors pour tout $x \in M$ chaque cut-locus $\mathrm{cut}(x)$, vu de T_xM grâce a l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine convexe. Ce résultat est le premier de ce type où on arrive a déduire une propriété géométrique aussi forte du cut-locus, et la découverte de ce lien a été un point de départ pour toute une théorie qui est encore en train d'être développée. Par exemple, en utilisant ce point de vue, Figalli et Rifford [15] ont démontré que, si on perturbe la métrique de la sphère 2-dimensionnelle, alors pour tout point x chaque cut-locus $\mathrm{cut}(x)$, vu de T_xM grâce à l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine strictement convexe, ce qui est un résultat géométrique complétement nouveau. Ce résultat est poussé encore plus loin par Figalli, Rifford et Villani [16], ou ils montrent la présence d'une connection très forte en dimension 2 entre la condition de MTW et la convexité des lieux focaux.

On rappelle enfin que Villani a écrit deux livres très importants [37, 38], qui sont devenus des textes de référence pour les jeunes chercheurs qui se lancent dans le sujet, et qui mettent de l'ordre dans un domaine qui continue à se développer dans plusieurs directions.

References

[1] Alexandre R., and Villani C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. *Comm. Pure Appl. Math. 55*, 1 (2002), 30–70.

[2] Alexandre R., Desvillettes L., Villani C. and Wennberg B. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Rat. Mech. Anal. 152*, (2000), 327-355.

[3] Bobylev A. V., Cercignani C. On the rate of entropy production for the Boltzmann equation *J. Statist. Phys. 94*, 3-4 (1999), 603-618.

[4] Brenier Y. Polar decomposition and increasing rearrangement of vector fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305*, 19 (1987), 805–808.

[5] Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math. 44*, 4 (1991), 375–417.

[6] Carlen E., and Carvalho M. Entropy production estimates for Boltzmann equations with physically realistic collision kernels. *J. Statist. Phys. 74*, 3-4 (1994), 743–782.

[7] Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications. Springer, Berlin, 1988.

[8] Cercignani C. H-theorem and trend to equilibrium in the kinetic theory of gases. *Arch. Mech. 34*, (1982), 231-241.

[9] Cordero-Erausquin D., McCann R. J, and Schmuckenschlager M. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Invent. Math. 146*, 2 (2001), 219–257.

[10] Cordero-Erausquin D., Nazaret B., and Villani C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math. 182*, 2 (2004), 307–332.

[11] Desvillettes L., and Villani C. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. H-theorem and applications. *Comm. Partial Differential Equations 25*, 1-2 (2000), 261–298.

[12] Desvillettes L., and Villani C. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math. 54*, 1 (2001), 1–42.

[13] Desvillettes L., and Villani C. On a variant of Korn's inequality arising in statistical mechanics. *ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8*, (2002), 603–619 (electronic). A tribute to J. L. Lions.

[14] Desvillettes L., and Villani C. On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: the Boltzmann equation. *Invent. Math. 159*, 2 (2005), 245-316.

[15] Figalli A., and Rifford L. Continuity of optimal transport maps on small deformations of $\mathbb{S}^2$. Preprint, 2008.

[16] Figalli A., Rifford L., and Villani C. On the stability of Ma-Trudinger-Wang curvature conditions. In preparation.

[17] Grad H. On Boltzmann's H-theorem. *J. Soc. Indust. Appl. Math. 13*, 1 (1965), 259–277.

[18] Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math. 97*, (1975), 1061–1083.

[19] Guo Y. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal. 169*, 4 (2003), 305–353.

[20] Helffer B., and Nier F. In *Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Vol. 1862 of lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2005.

[21] Herau F., and Nier F. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. *Arch. Ration. Mech. Anal. 171*, 2 (2004), 151-218.

[22] Ledoux M. Géométrie des espaces métriques mesurés: les travaux de Lott, Villani, Sturm. *Séminaire Bourbaki*, 2008.

[23] Loeper G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems. *Acta Math.,* to appear.

[24] Loeper G. Regularity of optimal maps on the sphere: The quadratic cost and the reflector antenna. Preprint, 2008.

[25] Loeper G., and Villani C. Regularity of optimal transport in curved geometry: the nonfocal case. Preprint, 2008.

[26] Lott J., and Villani C. Ricci curvature via optimal transport. *Ann. of Math.,* to appear.

[27] Ma X. N., Trudinger N. S., and Wang X. J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Arch. Ration. Mech. Anal. 177*, 2 (2005), 151–183.

[28] Mouhot C., and Neumann L. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus *Nonlinearity 19*, (2006), 969-998.

[29] Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations 26*, 1-2 (2001), 101–174.

[30] Otto F., and Villani C. F. Otto and C. Villani: Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal. 173*, 2 (2000), 361–400.

[31] von Renesse M.-K., and Sturm K. T. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math. 58*, 7 (2005), 923–940.

[32] Sturm K. T. On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math. 196*, 1 (2006), 65–131.

[33] Sturm K. T. On the geometry of metric measure spaces. II. *Acta Math. 196*, 1 (2006), 133–177.

[34] Toscani G., and Villani C. Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Comm. Math. Phys. 203*, 3 (1999), 667–706.

[35] Villani C. Hypocoercivity. Memoirs Amer. Math. Soc. (to appear).

[36] Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Commun. Math. Phys. 234* (2003), 455–490.

[37] Villani C. Topics in optimal transportation. *Graduate Studies in Mathematics, 58.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[38] Villani C. Optimal transport, old and new. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 338.* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[39] C. Villani: Stability of a 4th-order curvature condition arising in optimal transport theory. Preprint, 2008.