1.1. Seien a, b, f und g differenzierbare Funktionen. Entscheide ob die Folgenden Differentialgleichungen in $u(x, y)$ homogen linear, inhomogen linear oder nicht linear sind und bestimmen sie die Ordnung. Im Fall einer homogen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung entscheide ob die Gleichung elliptisch, hyperbolish oder parabolish ist.

(a) $u_{xx} + u_{yyy} = f$

(b) $au_{xx} + b(u^2 + u) = 0$

(c) $u_x u_y + u = 0$

(d) $2u_{xx} + u_x + 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$

(e) $(4 - x^2)u_{xx} - 4xyu_{xy} + (4 - y^2)u_{yy} = g$ auf $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$.

1.2.

(a) Finde die Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = x^2 & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 6x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Bestimme den Wert von u im Punkt $(x, t) = (0, 2)$.

(c) Bestimme das Abhängigkeitsgebiet der Lösung in $(x, t) = (0, 2)$.

1.3.

(a) Eine Druckwelle, verursacht durch eine Explosion, erfüllt die Gleichung

$$P_{tt} - 25P_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \,,$$

wobei $P(x, t)$ den Druck zur Zeit t am Ort x bezeichnet. Die Anfangsbedingungen zur Zeit der Explosion $t = 0$ sind

$$P(x, 0) = \begin{cases} 5 & |x| \leq 1\,, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases} \qquad P_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1\,, \\ 0 & |x| > 1\,. \end{cases}$$

(b) Für welche Punkte der Raumzeit (x, t) ist $P(x, t) = 0$?

(c) Diskutieren das asymptotische Verhalten für $t \to +\infty$ von u .

1.4.

(a) Finde die Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin^2(t) + x & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 2x & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 6\cos(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.5. Wir betrachten die folgende inhomogene Wellengleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} = t^2 x \quad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = x \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimme und zeichne das Charakteristische Dreieck an den punkten $(0, 1/2)$, $(0, 2)$ und $(1, 5/2)$.

(b) Finde die Lösung des Problems mit Hilfe der Formel von d'Alembert.

1.6. Gegeben sei

$$f(x) = \sinh^2(x) \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1)\,.$$

(a) Finde die komplexe Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Finde die reelle Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

Erinnerung: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1.7. Sei $f(x) = |x - \frac{\pi}{2}|$ definiert auf $[0, \pi]$.

Skizziere die folgenden Funktionen und berechne ihre Fourier Reihen.

i) f_1 ist die gerade π periodische Fortsetzung von f,

ii) f_2 ist die ungerade π periodische Fortsetzung von f,

iii) $f_3 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$,

iv) f_4 ist die π periodische Fortsetzung von f.

1.8.

(a) Entwicheln Sie $f(x) = x^2$, $0 \le x \le T$ in eine Fourierreihe.

(b) Was ergibt für $T = 2\pi$?

(c) Was erhält man bei b) für

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

wenn $x = 2\pi$ gesetzt wird?

1.9. Sei $f(x) = x^3 - x$ definiert auf $[-1, 1]$.

(a) Berechne die reelle Fourierreihe der 2-periodischen Fortsetzung von $f(x)$.

(b) Berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{(2m-1)^3}\,.$$

1.10.

(a) Beschreibe jeden Schritt der Methode der Separation der Variablen um des folgenden Anfangs- und Randwertproblems (mit homogen Neumannranbedingungen) zu lösen

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u_x(0,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_x(1,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(b) Das PDE-Modell in (b) beschreibt die Wärmeausbreitung in einem sehr dünnen isolierten Stab. Berechne die Grösse

$$U(t) := \int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

die man als mittlere Temperatur des Stabs zur Zeit t interpretieren kann. Was können wir schliessen?

1.11. Beschreibe jeden Schritt um das folgende inhomogene Problem für die Wärmenleitungsgleichung zu lösen

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = 1 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(\pi,t) = 4 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \dfrac{3}{\pi}x + 1 + \cos^2(\pi x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

1.12. Beschreibe jeden Schritt um die folgende homogene Wellengleichung mit homogenen Dirichletrandbedingungen zu lösen

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \in \mathbb{R}_+ \\ u_t(x,0) = \cos(\pi x) - 1 & x \in (0,2) \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in (0,2). \end{cases}$$

1.13. Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion in $B_4(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 16\}$, welche folgender Randbedingung genügt:

$$u(x,y) = 2 + x^2 \quad \text{für } (x,y) \in \partial B_4(0).$$

(a) Zeige, dass $2 < u(x,y) < 18$, *ohne* u explizit zu finden.

(b) Bestimme $u(0,0)$ mithilfe der Poissonformel.

(c) Ist es möglich, dass ein Punkt $(x_0,y_0) \in B_4(0)$ existiert, der $u(x_0,y_0) = 18$ genügt? Warum?

(d) Beschreibe die Methode der Separation der Variables um das folgende Problem zu lösen

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{für } (x,y) \in B_4(0) \\ u(x,y) = 2 + x^2 & \text{für } (x,y) \in \partial B_4(0) \end{cases}$$

1.14.

Sei $R := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ das Einheits-Viereck. Bestimme die Lösung $u : R \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } R \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{auf } \partial R, \end{cases}$$

wobei

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{falls} \quad y = 0\,, \\ x^3 & \text{falls} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$

1.15. Seien $u_1, u_2 \colon B_1(0) \to \mathbb{R}$ Löungen der Dirichlet-Probleme

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{für } (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = g_k(x,y) & \text{für } (x,y) \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

wobei $g_1(x,y) = 2$ und $g_2(x,y) = 4x^2$.

(a) Zeige $|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \leq 2$.

(b) Berechne $u_1(x,y) - u_2(x,y)$.

1.16.

(a) Sei f eine unbekannte Funktion mit

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2+7k^2}\,.$$

Bestimme $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

(b) Sei f eine unbekannte Funktion mit

$$\hat{f}(w) = \frac{iw}{5+4w^3}\,.$$

Bestimme $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$.

1.17. Zeige mithilfe der Fouriertransformierten von $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.18. Berechne sie die Fouriertransformation der Funktionen

(a)

$$f(x) = e^{-|x+6|}$$

(b)

$$f(x) = xe^{-|x+6|}$$

(c)

$$f(x) = x^2 e^{-|x+6|}$$

(d)

$$f(x) = \max(x,0)e^{-2|x|}$$

1.19. Mithilfe der Fourier Transformation finde die Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

in den Fälle

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x}$,

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 3 & x > 0. \end{cases}$$

1.20. Mithilfe der Tabelle im Skript, der Partialbruchzerlegung und der Linearität der Laplace-Transformierten, berechne die inverse Laplace-Transformation der Funktionen:

(a) $F(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$

(b) $F(s) = \frac{e^{-3s}s}{s^2+\pi^2}$

(c) $F(s) = \frac{e^{-3s}s}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-s}s}{(s+2)^2}$

(d) $F(s) = \frac{2s^2-3s+3}{s^3-s}$,

(e) $F(s) = \frac{4s-2}{s^2+2s-8}$

1.21. Löse die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Laplacetransformation:

(a) $\ddot{x} + x = 0\,,\ x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = 0,$

(b) $\ddot{x} + x = t\,,\ x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = 0,$

(c) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,,\ t \geq 0,\ x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = -1.$