D-HEST | Mathematik III | HS 2012

Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

# Prüfung HS2012
# Lösungsvorschlag

**1.** a)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{K_1} \arrow[r, "a"] & \boxed{K_2} \arrow[r, bend left, "c"] & \boxed{K_3} \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "d"] & {}
\end{tikzcd}
$$

b) Für eine stationäre Lösungsfunktion $y_\infty$ gilt $y'_\infty = 0$,

$$0 \overset{!}{=} y'_\infty(t) = A \cdot y_\infty$$

Das heisst, es gibt einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems genau dann, wenn das homogene LGS eine nichttriviale Lösung hat, also genau dann wenn, $\det(A) = 0$. Also:

i) falsch, weil $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -c & 0 \\ 0 & c & -d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = -acd \neq 0$.

ii) richtig, weil $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & -b-d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = 0$ mit zum Beispiel $v_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) richtig, weil $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ 0 & c & -b \end{pmatrix}$ und $\det(A) = 0$ mit zum Beispiel $v_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

iv) falsch, weil $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ 0 & c & -2b \end{pmatrix}$ und $\det(A) = -abc \neq 0$.

c) Die Matrix (mit $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ und $d = 0$)

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hat drei paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte, also gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, v_2, v_3$ (mit EW $\lambda_i$), und die allgemeine Lösung des Systems ist von der Form:

$$t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 \cdot t} v_3.$$

Mithin ist $\lambda_1$ EW zum EV $(0, -1, 1)^\top$ und $\lambda_3$ EW zum EV $(0, 1, 2)^\top$. Somit

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1,$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_3 = 0.$$

**Bitte wenden!**

**Alternative Lösung:** Wir setzen die Lösungsfunktion $y_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in das DGL-System ein:

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1'(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{\lambda_1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\lambda_1 = -1$.
Analog berechnen wir $\lambda_3 = 0$.

d) Einen stationären Zustand berechnet man wieder durch $y'(t) = 0$. Somit folgt

$$0 = \begin{pmatrix} -c & b \\ c & -b-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Schritt Gauss-Elimination für dieses inhomogene LGS ergibt

$$0 = \begin{pmatrix} -c & b \\ 0 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}.$$

Das LGS ist genau dann (eindeutig) lösbar, wenn $d \neq 0$.

**Siehe nächstes Blatt!**

**2.** a) Die Fixpunkte des Systems berechnen wir aus der folgenden Gleichung $0 = x'(t) = y'(t)$:

$$0 = x'(t) = -\frac{1}{3} \cdot x(t) + \frac{1}{6} \cdot x(t) \cdot y(t)$$
$$0 = y'(t) = \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(1 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right) - \frac{1}{10} \cdot x(t) \cdot y(t).$$

Wir lösen also das folgende System

$$2x = xy$$
$$2y\left(1 - \frac{y}{4}\right) = xy.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 2$. Falls $x = 0$ ist, lautet die zweite Gleichung $y\left(1 - \frac{y}{4}\right) = 0$. Das ergibt $y = 0$ oder $y = 4$.
Falls $y = 2$ ist, lautet die zweite Gleichung $x = 1$.
Die Lösungen sind

$$(x_1, y_1) = (1, 2); \quad (x_2, y_2) = (0, 0); \quad (x_3, y_3) = (0, 4)$$

b)
- Falsch. Die Beutelpopulation wächst bis $y = 4$. Dieser Punkt ist ein Fixpunkt der DGL für $y$.
- Falsch, weil $y'(0) = \frac{1}{5}(1 - x(0)) > 0$.
- Richtig, weil $(x_1, y_1) = (1, 2)$ ein Fixpunkt des Systems ist.
- Richtig, weil $y'(0) = \frac{1}{5}(1 - x(0)) < 0$.

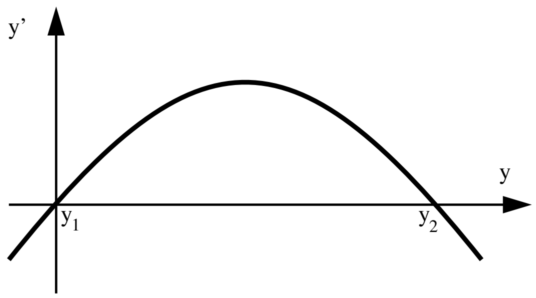
c) Die neue DGL heisst

$$y'(t) = \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(1 - \frac{5}{4} \cdot y(t)\right).$$

Die Fixpunkte sind ($y'(t) = 0$)

$$y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{4}{5}.$$

Für DGL $y'(t) = F(y(t))$ ist der Fixpunkt $y_1$ stabil genau dann, wenn $F'(y_1) < 0$, sonst ist er instabil. Hier ist $F'(y_1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}y_1$.
Der Punkt $y_1$ ist instabil weil $F'(0) = \frac{1}{5} > 0$ und der Punkt $y_2$ ist stabil weil $F'(\frac{4}{5}) = -\frac{1}{5} < 0$ (siehe Bild unten).




**Bitte wenden!**

**3.** In 2 Dimensionen lautet die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}), \tag{PDE}$$

wobei $D > 0$ die Temperaturleitfähigkeit des Mediums ist.

a) Falls $u$ eine stationäre Temperaturverteilung ist, d.h. $u_t = 0$, erhalten wir $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
Der Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ergibt

$$X''X + Y''Y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \text{ (konstant.)}$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 & \text{(DE1)} \\ Y'' - \omega^2 Y = 0 & \text{(DE2)} \end{cases}$$

b) (DE1) ergibt

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Aus $X(0) = 0$ (RB) folgt $A = 0$,
und aus $X(\pi) = 0$ folgt $\sin(\omega\pi) = 0$. Somit erhalten wir $\omega = k$, $k \in \mathbb{N}_0$.
(oder $B = 0$, in welchem Fall wir die triviale Lösung $X \equiv 0$ erhalten). Also

$$X(x) = B\sin(kx), k \in \mathbb{N}_0,$$

(wobei zu beachten ist, dass wir negative Werte von $k$ ausgelassen haben, so dass die Lösungen linear unabhängig sind.)

c) (DE2) ergibt

$$Y(y) = C\mathrm{e}^{\omega y} + D\mathrm{e}^{-\omega y}.$$

Aus $Y(0) = 0$ (RB) folgt $D = -C$. Also

$$Y(y) = C(\mathrm{e}^{ky} - \mathrm{e}^{-ky}), \ k \in \mathbb{N}_0.$$

d) Superposition: $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(kx)(\mathrm{e}^{ky} - \mathrm{e}^{-ky})$.
Wir setzen $y = \pi$ und erhalten mittels Koeffizientenvergleich mit $\sin(3x)$

$$C_3 = \frac{1}{\mathrm{e}^{3\pi} - \mathrm{e}^{-3\pi}} \text{ und } C_k = 0 \text{ sonst.}$$

Also $u(x, y) = \sin(3x)\dfrac{\mathrm{e}^{3y} - \mathrm{e}^{-3y}}{\mathrm{e}^{3\pi} - \mathrm{e}^{-3\pi}} = \sin(3x)\dfrac{\sinh(3y)}{\sinh(3\pi)}$.

e) Da $u$ eine harmonische Funktion (eine Lösung der Laplace-Gleichung) ist, erfüllt sie das Maximumprinzip. Das schwache Maximumprinzip sagt aus, dass das Maximum auf dem Rand von $Q$ angenommen wird.

Auf drei Seiten von $Q$ ist die Lösung $u = 0$. Auf der vierten hat $u$ die Werte $u(x, \pi) = \sin(3x)$ für $x \in [0, \pi]$. Um Fixpunkte zu finden, setzen wir $u_x(x, \pi) = 0$:

$$u_x(x, \pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(3x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Da $u(\pi/2, \pi) = \sin(3\pi/2) = -1$, nimmt die Funktion $\sin(3x)$ das Maximum 1 in den Punkten $x = \pi/6$ und $x = 5\pi/6$ an.
Also nimmt die Lösung $u$ ihren Maximalwert 1 in Punkten $(\pi/6, \pi)$ und $(5\pi/6, \pi)$ an.