Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

ETH Zürich, August 2013

HST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle		
	MC	Total	MC	Total	Max
1					12
2					12
3	-		-		12
Total					36

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.

- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.

- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.

- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.

- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.

- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!

- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen Sie nicht begründen.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

1. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ 0 & c & -b-d \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}.$$

Das lineare DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3.

$$\boxed{K_1} \qquad\qquad \boxed{K_2} \qquad\qquad \boxed{K_3}$$

a) Zeichnen Sie die Pfeile in das Kompartimentsystem und beschriften sie diese mit a, b, c, d. Achten Sie dabei auf die Pfeilrichtung!
Hinweis: Es findet Austausch und Abbau statt.

b) In welchen der vier folgenden Fällen gibt es einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$, welche nicht von t abhängt.

richtig	**falsch**	
○	○	Für $0 < a, c, d < 1$ und $b = 0$.
○	○	Für $0 < a, b, d < 1$ und $c = 0$.
○	○	Für $0 < a, b, c < 1$ und $d = 0$.
○	○	Für $0 < a, b, c, d < 1$ und $b = d$.

c) Seien $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$ und $d = 0$.
Gegeben sei eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ des Systems $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$

$$\left\{ t \mapsto e^{\lambda_1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-\frac{2}{3} \cdot t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{\lambda_3 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimmen Sie die Zahlen λ_1 und λ_3.

d) Wir betrachten nun das 2-Kompartimentsystem

$$\boxed{K_2} \qquad\qquad \boxed{K_3}$$

mit einer konstanten Zufuhr $t \mapsto Z(t) = a > 0$. Die Entwicklung sei beschrieben durch

$$y'(t) = B \cdot y(t) + g(t)$$

mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -c & b \\ c & -b-d \end{pmatrix} \text{ und } g(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $b, c > 0$.
Zeigen Sie, dass genau dann einen nichttrivialen stationären Zustand gibt, wenn $d \neq 0$ gilt.

Bitte wenden!

2. In einem Räuber-Beute-Modell beschreibe x die Räuberpopulation und y die Beutepopulation:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{3} \cdot x(t) + \frac{1}{6} \cdot x(t) \cdot y(t) && (1) \\ y'(t) &= \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(1 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right) - \frac{1}{10} \cdot x(t) \cdot y(t) && (2) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir wählen geeignete Zahlen, um einfach rechnen zu können.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

b) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, wenn wir $y(0) = 2$ annehmen?

richtig	**falsch**	
◯	◯	Wenn es keine Räuber gibt ($x = 0$), so wächst die Beutepopulation im Laufe der Zeit unbeschränkt.
◯	◯	Ist zu Beginn $0 < x(0) < 1$, so ist y zu Beginn monoton fallend.
◯	◯	Ist zu Beginn $x(0) = 1$, ist die Beutepopulation immer doppelt so gross wie Räuberpopulation.
◯	◯	Ist zu Beginn $x(0) > 1$, so ist y zu Beginn monoton fallend.

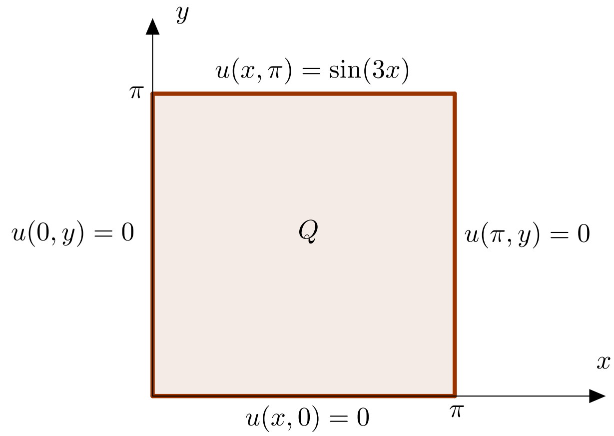
c) Wir betrachten nun nur noch die DGL (2)

$$y'(t) = \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(1 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right) - \frac{1}{10} \cdot x(t) \cdot y(t)$$

und nehmen an, dass für alle $t \geq 0$, $x(t) = 2y(t)$ gilt.
Stellen Sie die neue DGL für $y(t)$ auf, und bestimmen Sie deren stabilen und instabilen Fixpunkte.

3. Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung $u(x, y)$ auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) (siehe Figur). Drei Seiten von Q werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte $u(x, \pi) = \sin(3x)$ (siehe Figur). Die gesuchte Funktion u erfüllt also

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x, y) &= 0 && \text{auf } Q \\
u(0, y) &= 0 && \text{für } 0 < y < \pi \\
u(\pi, y) &= 0 && \text{für } 0 < y < \pi \\
u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi \\
u(x, \pi) &= \sin(3x) && \text{für } 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$



a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.

   Hinweis: Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für X periodische Lösungen auftreten.

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für X unter Beachtung der Randbedingungen $X(0) = X(\pi) = 0$.

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für Y unter Beachtung der Randbedingung $Y(0) = 0$.

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x, y)$.

e) In welchen Punkten von Q nimmt die Lösung ihr Maximum an? (Begründung!)