Prüfung August 2017
Lösung

1. a)

$$A = \begin{pmatrix} -a-e & b & d \\ a & -c-b & 0 \\ e & c & -d-f \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix (mit $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}, e = f = 0$)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

hat drei paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte, also gibt es eine Basis aus Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 (mit EW λ_i), und die allgemeine Lösung des Systems ist von der Form:

$$t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 \cdot t} v_3.$$

Mit den Angaben einer Basis aus der Aufgabe bestimmen wir den EW λ_3 durch

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_3 = 0.$$

und EW λ_2 durch

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_2 = -1.$$

Damit der Vektor $\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein stationärer Zustand des Systems ist, muss die Gleichung

$$0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lösen.Dies führt zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} -2\mathbf{X} + 8 + 4 = 0 \\ 2\mathbf{X} - 12 = 0 \\ 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

welches $\mathbf{X} = 6$ als Lösung hat.

Wir erhalten

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Daraus folgt, dass für $C_3 = 0$ die Entwicklung gegen Null konvergiert. Somit kann man jeden Startvektor der Form

$$y(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen.

c) Ein stationärer Zustand erfüllt die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}.$$

Zwei Schritte des Gauss-Verfahrens für dieses inhomogene LGS ergeben

$$0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ P+Q \\ P+Q+R \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist genau dann gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, wenn $P + Q + R = 0$ gilt.

In diesem Fall haben wir dann unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass

a) falsch, weil $0 + 0 + \frac{1}{2} \neq 0$.
b) richtig, weil $\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$.
c) falsch, weil $\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \neq 0$.
d) richtig, weil $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$.

d) Es muss gelten

$$\log_{10}(4R^2) + \log_{10}(5R^{-2}) + \log_{10}(R) = 0$$

Dies enstpricht

$$\log_{10}(20R) = 0 \iff R = \frac{1}{20}.$$

2. a) Für eine ungerade Funktion sind die Koeffizienten a_n gleich Null.

Das heisst, wir wählen $t \neq 0$ beliebig, $p = 0, q \neq 0$ beliebig und $r = 0$. Weiterer möglicher Fall wäre falls nur eine der beiden Variablen t oder p gleich null ist.

Ist die Funktion hingegen gerade, dann sind alle $b_n = 0$. Die Funktion ist gerade und nicht konstant für $t = 0$, $p \neq 0$ beliebig, $q = 0$ und r beliebig.

b) Wir wissen aus Teil a), dass bei der Wahl $p = -1, q = 0$ und $r = 1$ die Koeffizienten $b_n = 0$ sind. Zunächst berechnen wir den Koeffizienten a_0 unter Beachtung der Periode $T = 2$ und der Tatsache, dass die Funktion gerade ist:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 (-x^2+2)dx = \frac{10}{3}.$$

Nun folgen die Koeffizienten für $n \geq 1$ durch

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx &= 2\int_0^1 (-x^2+2)\cos(n\pi x)dx \\
&= 2\left[\underbrace{(-x^2+2)\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx\right] \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{4}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}x\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \underbrace{\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx}_{=0}\right] \\
&= -\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}
\end{aligned}$$

c) Die Koeffizienten der Komplexen Fourier-Reihe kann man mit folgenden Formeln direkt angeben:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{5}{3} \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} \\
c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist somit:

$$g(x) = \frac{5}{3} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} e^{inx}$$

Bitte wenden!

3. **a)** Der Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ergibt

$$X''Y + Y''X = \varepsilon^2 XY \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon^2 - \frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \text{ (konstant.)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} X'' - (\varepsilon^2 + \omega^2)X = 0 & \text{(DE1)} \\ Y'' + \omega^2 Y = 0 & \text{(DE2)} \end{cases}$$

.

b) (DE1) ergibt

$$Y(y) = A\cos(\omega y) + B\sin(\omega y).$$

Aus $Y(0) = 0$ (RB) folgt $A = 0$,
und aus $Y(\pi) = 0$ folgt $\sin(\omega\pi) = 0$. Somit erhalten wir $\omega = k$, $k \in \mathbb{N}$
(oder $B = 0$, in welchem Fall wir die triviale Lösung $Y \equiv 0$ erhalten). Also

$$Y(y) = B\sin(ky), k \in \mathbb{N},$$

(wobei zu beachten ist, dass wir negative Werte von k ausgelassen haben, so dass die Lösungen linear unabhängig sind.)

c) (DE2) ergibt

$$X(x) = C\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}x} + D\mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+\omega^2}x}.$$

Aus $X(0) = 0$ (RB) folgt $D = -C$. Also

$$X(x) = C(\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+k^2}x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+k^2}x}), \;\; k \in \mathbb{N}.$$

d) Superposition: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(ky)(\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+k^2}x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+k^2}x})$.
Wir setzen $x = \pi$ und erhalten mittels Koeffizientenvergleich mit $\sin(y)$

$$C_1 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+1}\pi} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+1}\pi}} \text{ und } C_k = 0 \text{ sonst.}$$

Also $u(x,y) = \sin(y)\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+1}x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+1}x}}{\mathrm{e}^{\sqrt{\varepsilon^2+1}\pi} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\varepsilon^2+1}\pi}} = \sin(y)\dfrac{\sinh(\sqrt{\varepsilon^2+1}x)}{\sinh(\sqrt{\varepsilon^2+1}\pi)}$.

e) Der Laplace Operator ist ein Linearoperator. Da $u(x,y)$ und $\frac{x}{\pi}$ harmonisch sind, ist auch deren Differenz wieder harmonisch. Wir definieren deshalb
$g(x,y) = u(x,y) - \frac{x}{\pi}$.
Diese Funktion nimmt, da sie harmonisch ist, ihr Maximum auf den Rand an. Einsetzen ergibt

$$\max(g(x,y)) = \max(u(x,y) - \frac{x}{\pi}) = 0$$

auf dem Rand. Das heisst, die Funktion ist kleiner auf Q als auf dem Rand, wo deshalb

$$g(x,y) \leq 0$$

und somit

$$u(x,y) \leq \frac{x}{\pi}.$$