Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

ETH Zürich, August 2017

HtST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			25
2			15
3			20
Total			60

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen Sie nicht begründen.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

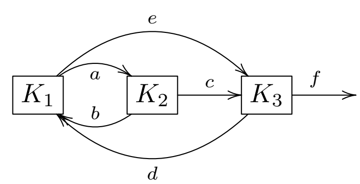
---

1. (*25 Punkte*)

Seien a, b, c, d, e, f reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d, e, f < 1$ und seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \text{ und } A \in M_{3\times 3}.$$

Das lineare DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$, beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3 mit:



a) Geben Sie die Matrix A an.

b) Seien $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$ und $e = 0$ und $f = 0$.

Gegeben sei eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ des Systems $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$,

$$\left\{ t \mapsto e^{-\frac{4}{3}\cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{\lambda_2 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{\lambda_3 \cdot t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Bestimmen Sie die Zahlen λ_2, λ_3.
- Finden Sie die Koordinate $\mathbf{X}$, sodass $t \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein stationärer Zustand des Systems ist.
- Bestimmen Sie einen Startvektor $y(0) \neq 0$, sodass die Entwicklung gegen Null konvergiert.

c) Die Entwicklung mit den Zahlen a, b, c, d, e, f aus Teil b) unterliege nun konstanten äusseren Einflüssen. Sie wird dabei durch $y'(t) = A \cdot y(t) + g(t)$ mit $g(t) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ beschrieben.

Für welche $g(t)$ unten existieren beliebig viele stationäre Zustände dieser Entwicklung ?

Existieren	**Existieren Nicht**	
○	○	$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
○	○	$g(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
○	○	$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
○	○	$g(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Die Entwicklung mit den Zahlen a, b, c, d, e, f aus Teil b) unterliege nun für $t > 0$ äusseren Einflüssen mit

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) \text{ mit } g(t) = \begin{pmatrix} \log_{10}(4R^2) \\ \log_{10}(5R^{-2}) \\ \log_{10}(R) \end{pmatrix}.$$

Für welche Konstanten R existieren beliebig viele stationäre Zustände dieser Entwicklung ?

2. (*15 Punkte*)

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = tx^3 + px^2 + qx + r \quad \text{für} -1 \leq x \leq 1$$

mit reellen Koeffizienten t, p, q und r. Weiterhin sei

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

die Fourier-Reihe, die aus f durch 2-periodische Fortsetzung entsteht.

a)
- Bestimmen Sie die Koeffizienten t, p, q und r so, dass f nicht konstant ist und alle a_n gleich Null sind.
- Bestimmen Sie die Koeffizienten t, p, q und r so, dass f nicht konstant ist und alle b_n gleich Null sind.

b) Wählen Sie $t = 0$, $p = -1$, $q = 0$ und $r = 2$.

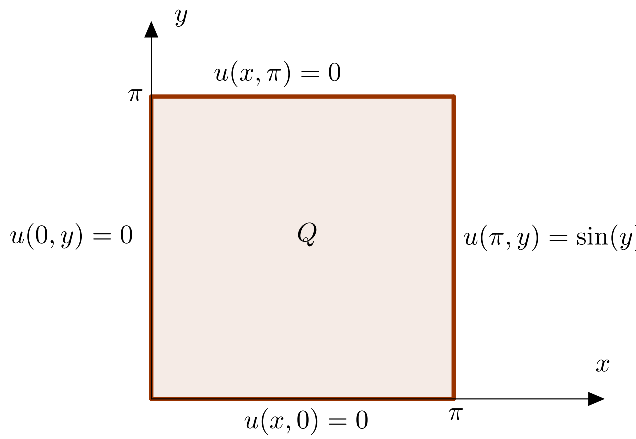
Bestimmen Sie damit die Koeffizienten a_n und b_n.

c) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten mit Hilfe des Aufgabenteils b) und geben Sie damit die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe an.

3. (*20 Punkte*)

Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung $u(x,y)$ auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, (π,π) (siehe Figur). Drei Seiten von Q werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte $u(\pi,y) = \sin(y)$ (siehe Figur). Die gesuchte Funktion u erfüllt:

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \varepsilon^2 u(x,y) && \text{auf } Q \\
u(0,y) &= 0 && \text{für } 0 < y < \pi \\
u(x,0) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi \\
u(x,\pi) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi \\
u(\pi,y) &= \sin(y) && \text{für } 0 < y < \pi
\end{aligned}
$$



Dabei ist ε eine gegebene Zahl.

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.

   Hinweis. Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für Y periodische Lösungen auftreten: $Y'' = -\omega^2 Y$.

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für Y unter Beachtung der Randbedingungen $Y(0) = Y(\pi) = 0$.

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für X unter Beachtung der Randbedingung $X(0) = 0$.

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x,y)$.

e) Für $\varepsilon = 0$ ist die Lösung $u(x,y)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auf Q die Ungleichung $u(x,y) \leq \frac{x}{\pi}$ gilt.

   Hinweis. Die rechte Seite der Ungleichung ist ebenfalls harmonisch.