Prüfung August 2019
Lösung

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [15 Punkte]

Wir betrachten zunächst das *homogene* Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}y(t) = A \cdot y(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y(t), \tag{1}$$

wobei $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie einen stationären Zustand $0 \neq y_\infty \in \mathbb{R}^3$ des Systems (1) an. [1 Punkt]

Lösung:

Für einen stationären Zustand y_∞ muss gelten:

$$0 = A \cdot y_\infty = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \\ y_{\infty,3} \end{pmatrix} \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

woraus wir unmittelbar erhalten: $y_{\infty,1} = y_{\infty,2} = 0$ und $y_{\infty,3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ein stationärer Zustand ist also z.B.

$$y_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[1/2 Punkt]

(b) Weisen Sie nach, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie $v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A bildet. [3 Punkte]

Lösung:

Wir rechnen nach:

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega v_1,$$

damit ist also w_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = i\omega$.

[1 Punkt]

Da A reell ist, folgt aus $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ durch komplexe Konjugation $A \cdot v_1^* = \lambda_1^* \cdot v_1^*$, also ist

$$v_2 := v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_1^* = -i\omega$.

[1 Punkt]

Schliesslich bemerken wir noch, dass wir in (a) gefunden haben, dass $A \cdot y_\infty = 0 = 0 \cdot y_\infty$, also ist

$$v_3 := y_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$.

[1 Punkt]

Wir beobachten, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 (über $\mathbb{C}$) linear unabhängig sind. Wegen $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3) = 3$ bilden sie eine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A.

(c) (i) Finden Sie T und T^{-1}, sodass gilt: $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
Hinweis: Benutzen Sie zum Invertieren von T, dass für eine invertierbare 2×2 Matrix $U \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ und $0 \neq b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

(ii) Finden Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{tD}.

(iii) Bestimmen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die fehlenden Einträge in

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & * & 0 \\ -\sin(\omega t) & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[7 Punkte]

Lösung:

(i) Man erkennt unmittelbar aus (b), dass eine mögliche Wahl von T ist:

$$T = (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

Wir invertieren T mit dem Hinweis (wobei hier $b = 1$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{smallmatrix}\right)$):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

Mit den Eigenwerten aus (b) finden wir unmittelbar, dass $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$, wobei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

(ii) Es gilt:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

(iii) Wir benutzen die Formel $e^{tA} = Te^{tD}T^{-1}$
[1 Punkt]

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Te^{tD}T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & 0 \\ -\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) & \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{[2 Punkt]} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir betrachten nun das *inhomogene* Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}y(t) = A \cdot y(t) + g(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei wieder $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$.

(d) Geben Sie die Lösung von (2) mit der Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an. [4 Punkte]

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass die Lösung des Anfangswertproblems (2) mit vorgegebenem $y(0)$ gegeben ist durch:

$$y(t) = e^{tA} \cdot y(0) + \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot g(u) du. \quad \textit{(Variation der Konstanten)}$$

Lösung:

Wir setzen $y(0)$ und $g(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die gegebene Formel ein:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-u)) & \sin(\omega(t-u)) & 0 \\ -\sin(\omega(t-u)) & \cos(\omega(t-u)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-u)) \\ -\sin(\omega(t-u)) \\ 1 \end{pmatrix} du \qquad \textit{[1 Punkt]} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\sin(\omega(t-u)) \\ -\frac{1}{\omega}\cos(\omega(t-u)) \\ u \end{pmatrix} \right]_0^t \qquad \textit{[2 Punkte]} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega}(\cos(\omega t) - 1) \\ t \end{pmatrix}. \qquad \textit{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

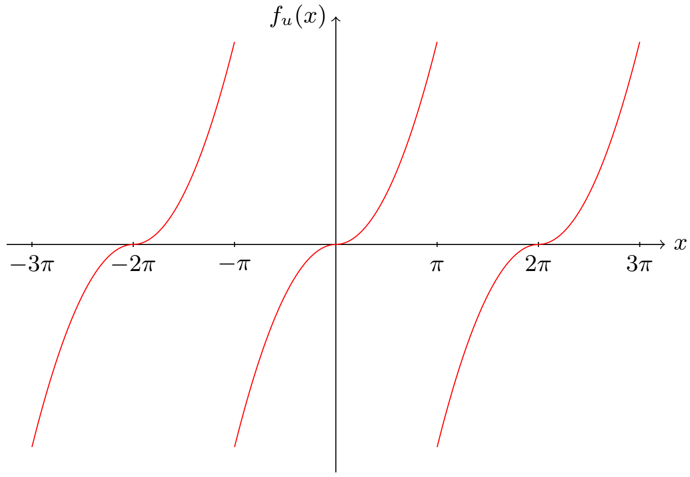
2. Fourier-Reihen [15 Punkte]

Die Funktion f sei gegeben auf dem Intervall $[0, \pi]$ durch $f(x) = x^2$.

(a) Wir setzen f auf $\mathbb{R}$ so fort, dass diese Fortsetzung eine **ungerade** Funktion f_u ist mit der Periode 2π. Skizzieren Sie unten den Graphen von f_u für $-3\pi < x < 3\pi$: [1 Punkt]

Lösung:

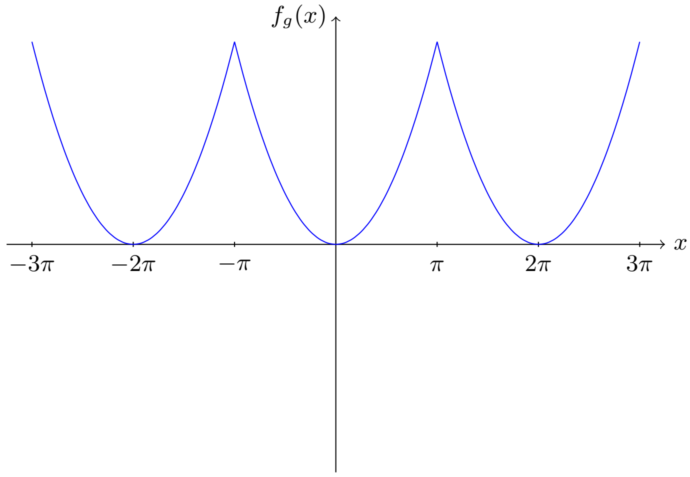
Der Graph der ungeraden Fortsetzung, f_u, hat folgende Form:



(b) Wir setzen nun f auf $\mathbb{R}$ so fort, dass diese Fortsetzung eine **gerade** Funktion f_g ist mit der Periode 2π. Skizzieren Sie unten den Graphen von f_g für $-3\pi < x < 3\pi$: [1 Punkt]

Lösung:

Der Graph der geraden Fortsetzung, f_g, hat folgende Form:



(c) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ der **ungeraden** Fortsetzung f_u aus Teil (a). [5 Punkte]

Lösung:

Da f_u die ungerade Fortsetzung von f ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n = 0, 1, 2, ...$

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

Nun berechnen wir die b_n, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_u(x)\sin(nx)dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)x^2\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\cos(nx)dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= -\frac{2\pi}{n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{n^2}\sin(nx)dx \qquad \textit{[1/2 Punkte]} \\
&= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4(-1)^n - 4}{\pi n^3} \qquad \textit{[1/2 Punkt]}
\end{aligned}$$

(d) Die **gerade** Fortsetzung f_g aus Teil (b) hat die Fourier-Reihe $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$ und wird durch diese auf ganz $\mathbb{R}$ dargestellt.

Verwenden Sie dies, um den Reihenwert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ zu berechnen. [2 Punkte]

Lösung:

Da f_g auf ganz $\mathbb{R}$ durch seine Fourier-Reihe dargestellt wird, gilt:

$$f_g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx).$$

In diese Gleichung setzen wir nun auf beiden Seiten $x = \pi$ ein und formen um:

$$f_g(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

(e) Betrachten Sie $V = C^0([-\pi,\pi])$, den Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$. Auf V haben wir das Skalarprodukt $\langle g,h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ und die bezüglich dieses orthonormalen Funktionen $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, ...$, mit

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx).$$

Sei P_N die orthogonale Projektion von V auf den Unterraum $U = \langle\{c_0, c_1, s_1, ..., c_N, s_N\}\rangle$.

(i) Begründen Sie, warum für die Projektion der **geraden** Fortsetzung f_g aus Teil (b) folgendes gilt:

$$P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N}\langle c_n, f_g\rangle c_n.$$

(ii) Für die **gerade** Fortsetzung f_g aus Teil (b) gibt es reelle Zahlen A, B mit

$$\|P_N(f_g)\|^2 = A + \sum_{n=1}^{N}\frac{B}{n^4}.$$

Bestimmen Sie diese Zahlen A und B.

Bitte wenden!

[6 Punkte]

Lösung:

(i) Die allgemeine Form der Projektion auf den Unterraum, der von orthonormalen Elementen erzeugt wird, liefert:

$$P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N} \langle c_n, f \rangle c_n + \sum_{n=1}^{N} \langle s_n, f \rangle s_n = \sum_{n=0}^{N} \langle c_n, f \rangle c_n,$$

wobei im zweiten Schritt verwendet wurde, dass $\langle s_n, f_g \rangle = 0$, da f_g gerade ist. *[2 Punkte]*

(ii) Nach der Definition der induzierten Norm ist

$$\begin{aligned}\|P_N(f_g)\|^2 &= \langle P_N(f_g), P_N(f_g) \rangle \qquad \textit{[1 Punkt]} \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^{N} \langle c_n, f \rangle c_n, \sum_{m=0}^{N} \langle c_m, f \rangle c_m \right\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{N} \langle c_n, f \rangle \langle c_m, f \rangle \underbrace{\langle c_n, c_m \rangle}_{=\delta_{n,m}} = \sum_{n=0}^{N} \langle c_n, f \rangle^2 \qquad \textit{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

Nun bemerken wir noch, dass gilt:

$$\langle c_0, f_g \rangle^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \right)^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2, \qquad \langle c_n, f_g \rangle^2 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \right)^2 = \pi a_n^2$$

[1 Punkt] also mit den Fourier-Koeffizienten aus (d):

$$\|P_N(f_g)\|^2 = \frac{\pi}{2} \frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{N} \pi \frac{16}{n^4}.$$

und wir können ablesen, dass $A = \frac{2\pi^5}{9}$ und $B = 16\pi$.
[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

3. Nichtlineares Differentialgleichungssystem [5 Punkte]

Wir betrachten das folgende *SIS*-Infektionsmodell mit Konstanten $c, w > 0$:

$$S'(t) = -c \cdot S(t) \cdot I(t)^2 + w \cdot I(t),$$
$$I'(t) = c \cdot S(t) \cdot I(t)^2 - w \cdot I(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Modell die Funktion N mit $N(t) = I(t) + S(t)$ konstant ist.

[1 Punkt]

Lösung:
Es gilt

$$N'(t) = (I(t) + S(t))' = I'(t) + S'(t) = 0 \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Damit muss $N(t) = N_0 = \text{const.}$ sein.
[1 Punkt]

(b) Sei $N_0 = N(t)$ dieser konstante Wert aus (a).
Weisen Sie nach, dass die Funktion I eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist:

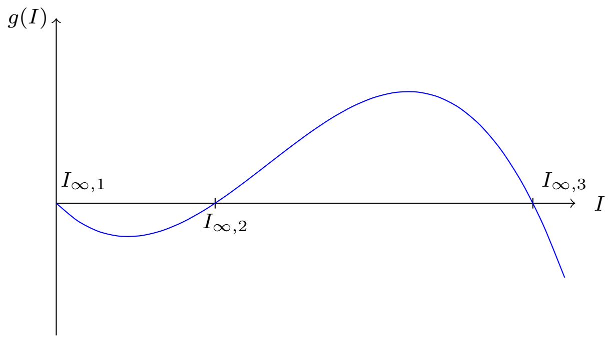
$$I'(t) = c \cdot (N_0 - I(t)) \cdot I(t)^2 - w \cdot I(t).$$

[1 Punkt]

Lösung:
Da $N(t) = I(t) + S(t) = N_0$ ist, können wir $S(t)$ durch $I(t)$ ausdrücken: $S(t) = N_0 - I(t)$
[1/2 Punkt]
und anschliessend in die Differentialgleichung für $I(t)$ einsetzen:

$$I'(t) = c(N_0 - I(t))I(t)^2 - wI(t). \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

(c) Sei g die Funktion mit $g(I) = c \cdot (N_0 - I) \cdot I^2 - w \cdot I$.
Wir wählen c und w mit $c\left(\frac{N_0}{2}\right)^2 > w$. Dann hat der Graph von g folgende Form:



(i) Geben Sie für diesen Fall die drei Fixpunkte $I_{\infty,1}$, $I_{\infty,2}$ und $I_{\infty,3}$ in Abhängigkeit der Konstanten c, N_0 und w an.

(ii) Entscheiden Sie jeweils ohne Rechnung, ob der Fixpunkt stabil oder instabil ist.

[3 Punkte]

Lösung:

(i) Ein Fixpunkt bei I_∞ liegt vor, falls $g(I_\infty) = 0$ gilt. Also setzen wir:

$$c(N_0 - I_\infty)I_\infty^2 - wI_\infty = I_\infty(cN_0I_\infty - cI_\infty^2 - w) = 0 \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

Wir lesen hieraus ab:

$$I_\infty = 0 =: I_{\infty,1} \ \textit{[1/2 Punkt]} \qquad \vee \qquad I_\infty^2 - N_0I_\infty + \frac{w}{c} = 0$$

und aus der letzten Gleichung erhalten wir:

$$I_{\infty,2} = \frac{N_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_0}{2}\right)^2 - \frac{w}{c}}, \qquad I_{\infty,3} = \frac{N_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_0}{2}\right)^2 - \frac{w}{c}}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

(ii) Aus der Graphik lesen wir unmittelbar ab, dass $I_{\infty,1}$ und $I_{\infty,3}$ *stabil* sind, denn für $i \in \{1, 3\}$ gilt $g'(I_{\infty,i}) < 0$, wohingegen $g'(I_{\infty,2}) > 0$, also ist $I_{\infty,2}$ *instabil.*
[1 Punkt]

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen [15 Punkte]

Gegeben ist das folgende Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

(PDE)	$u_t = \frac{1}{\pi^2} u_{xx}$,	für $(x,t) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R}_+$
$(\text{RB})_1$	$u(0,t) = 1 - e^{-t}$,	für $t > 0$
$(\text{RB})_2$	$u(1,t) = e^{-t}$,	für $t > 0$
(AB)	$u(x,0) = x$,	für $x \in \,]0,1[$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}$ mit

$$\widetilde{u}(x,t) = 1 - x + a\cos(\pi x)e^{-t}$$

mit einem geeignet gewählten Parameter a eine Lösung von (PDE) ist, die $(\text{RB})_1$ und $(\text{RB})_2$ erfüllt. [3 Punkte]

Lösung:
Wir berechnen

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_t - \tfrac{1}{\pi^2}\widetilde{u}_{xx} &= \tfrac{\partial}{\partial t}(1 - x + a\cos(\pi x)e^{-t}) - \tfrac{1}{\pi^2}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}(1 - x + a\cos(\pi x)e^{-t}) \\ &= -a\cos(\pi x)e^{-t} - \tfrac{1}{\pi^2}ae^{-t}(-\pi^2)\cos(\pi x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

also erfüllt $\widetilde{u}$ (PDE).
[1 Punkt]
Wir überprüfen $(\text{RB})_1$. Hier gilt:

$$\widetilde{u}(0,t) = 1 - 0 + a\underbrace{\cos(0)}_{=1}e^{-t} \stackrel{!}{=} 1 - e^{-t},$$

und dies ist erfüllt, falls $a = -1$.
[1 Punkt]
Schliesslich ist mit der Wahl von $a = -1$ auch

$$\widetilde{u}(1,t) = 1 - 1 - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}e^{-t} = e^{-t}$$

und damit $(\text{RB})_2$ erfüllt.
[1 Punkt]

(b) Sei u eine Lösung von (PDE), die $(\text{RB})_1$, $(\text{RB})_2$ und (AB) erfüllt. Betrachten Sie für so ein u nun $v(x,t) := u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ und zeigen Sie, dass v das folgende System löst:

(PDE)	$v_t = \frac{1}{\pi^2} v_{xx}$,	für $(x,t) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R}_+$
$(\text{RB}')_1$	$v(0,t) = 0$,	für $t > 0$
$(\text{RB}')_2$	$v(1,t) = 0$,	für $t > 0$
(AB')	$v(x,0) = 2x - 1 - a\cos(\pi x)$,	für $x \in \,]0,1[$

[2 Punkte]

Lösung:
Sei u eine Lösung von (PDE), die den Randbedingungen $(\text{RB})_1$ und $(\text{RB})_2$ sowie der Anfangsbedingung (AB) genügt.
Wegen der Linearität gilt:

$$v_t - \tfrac{1}{\pi^2}v_{xx} = u_t - \tfrac{1}{\pi^2}u_{xx} - (\widetilde{u}_t - \tfrac{1}{\pi^2}\widetilde{u}_{xx}) = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

[1 Punkt]
Analog sieht man:

$$\begin{aligned} v(0,t) &= u(0,t) - \widetilde{u}(0,t) = (1-e^{-t}) - (1-e^{-t}) = 0 \\ v(1,t) &= u(1,t) - \widetilde{u}(1,t) = e^{-t} - e^{-t} = 0 \\ v(x,0) &= u(x,0) - \widetilde{u}(x,0) = x - (1 - x - \cos(\pi x)e^0) = 2x - 1 + \cos(\pi x). \end{aligned}$$

[1 Punkt]

(c) Machen Sie einen Separationsansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und T an. Geben Sie auch Werte für $X(0)$ und $X(1)$ an. [2 Punkte]

Lösung:
Einsetzen des Separationsansatzes in (PDE) liefert:

$$\begin{aligned} & X(x)T'(t) = \frac{1}{\pi^2}X''(x)T(t) \\ \Rightarrow \qquad & -\omega^2 := \frac{X''(x)}{X(x)} = \pi^2\frac{T'(t)}{T(t)}, \end{aligned}$$

mit einer Konstante $\omega > 0$ (da die linke Seite nur von x, die rechte aber nur von t abhängt), die wir so wählen, damit sich für X periodische Lösungen ergeben. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\mathrm{DGL})_x \qquad & X''(x) + \omega^2 X(x) = 0 \\ (\mathrm{DGL})_t \qquad & T'(t) + \tfrac{\omega^2}{\pi^2}T(t) = 0. \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Aus den Randbedingungen $(\mathrm{RB}')_1$ und $(\mathrm{RB}')_2$ ergeben sich Bedingungen für X: $v(0,t) = X(0)T(t) = 0$, also $X(0) = 0$ (da T nicht die konstante Nullfunktion sein soll), analog: $X(1) = 0$.
[1 Punkt]

(d) Lösen Sie die in (c) gefundenen Differentialgleichungen für X und T unter Beachtung der Randbedingungen. [2 Punkte]

Lösung:
Die allgemeine Lösung für X lautet:

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), A, B \in \mathbb{R}.$$

[1/2 Punkt]
Wegen $X(0) = 0$ ergibt sich sofort $A = 0$.
[1/2 Punkt]
Weiterhin liefert die Forderung $X(1) = 0$ die Bedingung $\sin(\omega) = 0$, also $\omega = n\pi$, $n \geq 1$.
[1/2 Punkt]
Somit können wir schreiben:

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x), B_n \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung für T lautet:

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{\omega^2}{\pi^2}t} = C_n e^{-n^2 t}, C_n \in \mathbb{R}.$$

[1/2 Punkt]

Bitte wenden!

(e) Finden Sie durch einen Superpositionsansatz die Lösung v von (PDE), die $(\mathrm{RB}')_1$, $(\mathrm{RB}')_2$ und (AB') erfüllt. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) an, die $(\mathrm{RB})_1$, $(\mathrm{RB})_2$ und (AB) erfüllt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt:

$$\cos(\pi x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin(2k\pi x) \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

[6 Punkte]

Lösung:

Wir setzen $F_n := B_n C_n$ und machen den Superpositionsansatz

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 t}.$$

Dieser erfüllt automatisch (PDE), $(\mathrm{RB}')_1$ und $(\mathrm{RB}')_2$. Wir fordern nun:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) = v(0,x) \stackrel{!}{=} 2x - 1 + \cos(\pi x).$$

[1 Punkt]

Auf der linken Seite sehen wir, dass die F_n die Fourier-Koeffizienten einer *ungeraden*, 2-periodischen Funktion sind, die auf $[0,1]$ die Form $x \mapsto 2x - 1 + \cos(\pi x) =: h(x) + \cos(\pi x)$ hat.

Aus dem Hinweis kennen wir die Fourier-Koeffizienten der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von $x \mapsto \cos(\pi x)$. Wir berechnen noch diejenigen der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von h:

$$\begin{aligned}
b_n^{(h)} &= \frac{4}{2} \int_0^1 (2x-1)\sin(n\pi x)dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= 4\left[-\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx + \frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1 \\
&= -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\cos(0) + \frac{4}{n^2\pi^2}\underbrace{\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1}_{=0} \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}-1}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

[2 Punkte]

Hierzu addieren wir die Fourier-Koeffizienten aus dem Hinweis und erhalten:

$$F_{2l} = \frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}, \text{ für } l \in \mathbb{N},$$

$F_{2l+1} = 0$ für $l \in \mathbb{N}$.

[1 Punkt]

Dies liefert die Lösung für v:

$$v(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}\right)\sin(2l\pi x)e^{-4l^2 t}.$$

[1/2 Punkt]

Schliesslich erinnern wir uns, dass $v = u - \widetilde{u}$ und bekommen für u die Lösung:

$$u(x,t) = 1 - x - \cos(\pi x)e^{-t} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}\right)\sin(2l\pi x)e^{-4l^2 t}.$$

[1/2 Punkt]