Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

ETH Zürich, August 2019

D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			15
2			15
3			5
4			15
Total			50

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- **Am Ende der Prüfung:**
  1. Ordnen Sie die Blätter, auf denen Sie die Aufgaben bearbeitet haben.
  2. Stecken Sie diese Blätter mit Ihrer Prüfung an oberster Stelle in den bereitliegenden Umschlag. Dieser soll **nicht** verschlossen werden.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [15 Punkte]

Wir betrachten zunächst das *homogene* Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A \cdot y(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y(t), \tag{1}$$

wobei $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie einen stationären Zustand $0 \neq y_\infty \in \mathbb{R}^3$ des Systems (1) an. [1 Punkt]

(b) Weisen Sie nach, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie $v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A bildet. [3 Punkte]

(c) (i) Finden Sie Matrizen T und T^{-1}, sodass gilt: $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Hinweis: Benutzen Sie zum Invertieren von T, dass für eine invertierbare 2×2 Matrix $U \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ und $0 \neq b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

(ii) Finden Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{tD}.

(iii) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die fehlenden Einträge in

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & * & 0 \\ -\sin(\omega t) & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[7 Punkte]

Wir betrachten nun das *inhomogene* Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei wieder $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$.

(d) Geben Sie die Lösung von (2) mit der Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass die Lösung des Anfangswertproblems (2) mit vorgegebenem $y(0)$ gegeben ist durch:

$$y(t) = e^{tA} \cdot y(0) + \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot g(u) du \quad \textit{(Variation der Konstanten).}$$

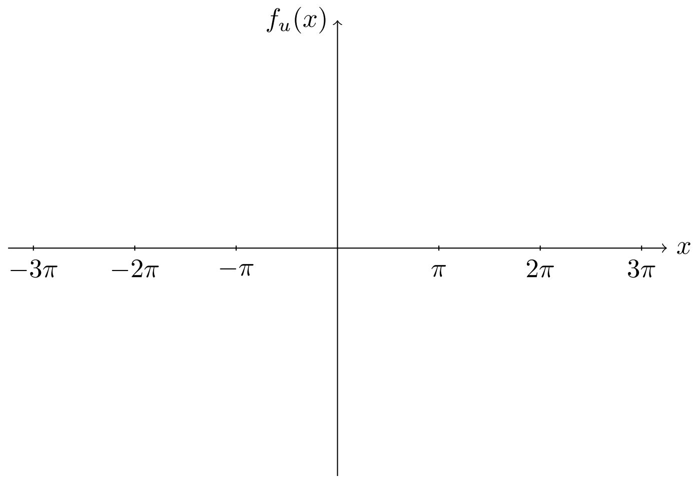
[4 Punkte]

Bitte wenden!

2. Fourier-Reihen [15 Punkte]

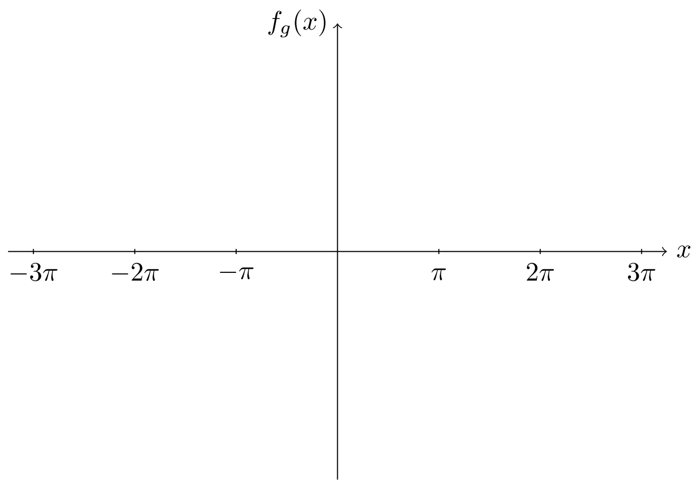
Die Funktion f sei gegeben auf dem Intervall $[0, \pi]$ durch $f(x) = x^2$.

(a) Wir setzen f auf $\mathbb{R}$ so fort, dass diese Fortsetzung eine **ungerade** Funktion f_u ist mit der Periode 2π. Skizzieren Sie unten den Graphen von f_u für $-3\pi < x < 3\pi$:



[1 Punkt]

(b) Wir setzen nun f auf $\mathbb{R}$ so fort, dass diese Fortsetzung eine **gerade** Funktion f_g ist mit der Periode 2π. Skizzieren Sie unten den Graphen von f_g für $-3\pi < x < 3\pi$:



[1 Punkt]

(c) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ der **ungeraden** Fortsetzung f_u aus Teil (a).

[5 Punkte]

(d) Die **gerade** Fortsetzung f_g aus Teil (b) hat die Fourier-Reihe $\dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$ und wird durch diese auf ganz $\mathbb{R}$ dargestellt.

Verwenden Sie dies, um den Reihenwert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu berechnen.

[2 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

(e) Betrachten Sie $V = C^0([-\pi, \pi])$, den Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Auf V haben wir das Skalarprodukt $\langle g, h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ und die bezüglich dieses orthonormalen Funktionen $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots$, mit

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx).$$

Sei P_N die orthogonale Projektion von V auf den Unterraum $U = \langle\{c_0, c_1, s_1, \ldots, c_N, s_N\}\rangle$.

(i) Begründen Sie, warum für die Projektion der **geraden** Fortsetzung f_g aus Teil (b) folgendes gilt:

$$P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N} \langle c_n, f_g\rangle c_n.$$

(ii) Für die **gerade** Fortsetzung f_g aus Teil (b) gibt es reelle Zahlen A, B mit

$$\|P_N(f_g)\|^2 = A + \sum_{n=1}^{N} \frac{B}{n^4}.$$

Bestimmen Sie diese Zahlen A und B.

[6 Punkte]

3. Nichtlineares Differentialgleichungssystem [5 Punkte]

Wir betrachten das folgende *SIS*-Infektionsmodell mit Konstanten $c, w > 0$:

$$S'(t) = -c \cdot S(t) \cdot I(t)^2 + w \cdot I(t),$$
$$I'(t) = c \cdot S(t) \cdot I(t)^2 - w \cdot I(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Modell die Funktion N mit $N(t) = I(t) + S(t)$ konstant ist.

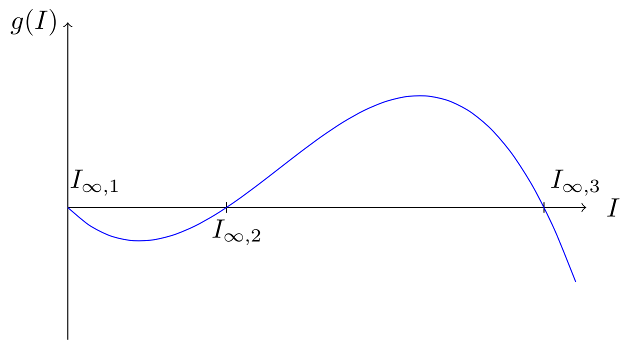
[1 Punkt]

(b) Sei $N_0 = N(t)$ dieser konstante Wert aus (a).
Weisen Sie nach, dass die Funktion I eine Lösung der folgenden Differentialgleichung ist:

$$I'(t) = c \cdot (N_0 - I(t)) \cdot I(t)^2 - w \cdot I(t).$$

[1 Punkt]

(c) Sei g die Funktion mit $g(I) = c \cdot (N_0 - I) \cdot I^2 - w \cdot I$.
Wir wählen c und w mit $c\left(\frac{N_0}{2}\right)^2 > w$. Dann hat der Graph von g folgende Form:



(i) Geben Sie für diesen Fall die drei Fixpunkte $I_{\infty,1}$, $I_{\infty,2}$ und $I_{\infty,3}$ in Abhängigkeit der Konstanten c, N_0 und w an.

(ii) Entscheiden Sie jeweils ohne Rechnung, ob der Fixpunkt stabil oder instabil ist.

[3 Punkte]

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen [15 Punkte]

Gegeben ist das folgende Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

(PDE)	$u_t = \frac{1}{\pi^2} u_{xx}$,	für $(x,t) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R}_+$
$(\mathrm{RB})_1$	$u(0,t) = 1 - e^{-t}$,	für $t > 0$
$(\mathrm{RB})_2$	$u(1,t) = e^{-t}$,	für $t > 0$
(AB)	$u(x,0) = x$,	für $x \in \,]0,1[$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{u}$ mit

$$\widetilde{u}(x,t) = 1 - x + a\cos(\pi x)e^{-t}$$

mit einem geeignet gewählten Parameter a eine Lösung von (PDE) ist, die $(\mathrm{RB})_1$ und $(\mathrm{RB})_2$ erfüllt. [3 Punkte]

(b) Sei u eine Lösung von (PDE), die $(\mathrm{RB})_1$, $(\mathrm{RB})_2$ und (AB) erfüllt. Betrachten Sie für so ein u nun $v(x,t) := u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ und zeigen Sie, dass v das folgende System löst:

(PDE)	$v_t = \frac{1}{\pi^2} v_{xx}$,	für $(x,t) \in \,]0,1[\, \times \mathbb{R}_+$
$(\mathrm{RB}')_1$	$v(0,t) = 0$,	für $t > 0$
$(\mathrm{RB}')_2$	$v(1,t) = 0$,	für $t > 0$
(AB')	$v(x,0) = 2x - 1 - a\cos(\pi x)$,	für $x \in \,]0,1[$

[2 Punkte]

(c) Machen Sie in (b) einen Separationsansatz $v(x,t) = X(x)T(t)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und T an. Geben Sie auch Werte für $X(0)$ und $X(1)$ an. [2 Punkte]

(d) Lösen Sie die in (c) gefundenen Differentialgleichungen für X und T unter Beachtung der Randbedingungen. [2 Punkte]

(e) Finden Sie durch Superposition die Lösung v von (PDE), die $(\mathrm{RB}')_1$, $(\mathrm{RB}')_2$ und (AB') erfüllt. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) an, die $(\mathrm{RB})_1$, $(\mathrm{RB})_2$ und (AB) erfüllt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt:

$$\cos(\pi x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2k\pi x) \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

[6 Punkte]