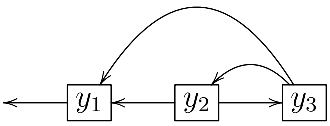
Mathematik III
Caspar/Hungerbühler
16.08.2021

Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, und sei $Z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $z > 0$ konstant.

Wir betrachten das inhomogene DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ für $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

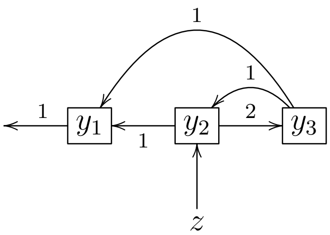
(a) [**2 Punkte**] Betrachten Sie das folgende Modell.



i. Beschriften Sie **in ihrem Antwortheft** die Pfeile so, dass das **homogene** DGL-System dazu passt.

ii. Ergänzen Sie dann das Modell **in ihrem Antwortheft** so, dass das gegebene **inhomogene** DGL-System dazu passt.

Lösung:



(b) [**4 Punkte**] Die Matrix A ist **nicht** diagonalisierbar und hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_3 = -4$.

i. Bestimmen Sie den dritten Eigenwert λ_2.

Lösung:

Lösungsvariante 1:
Wir wissen, dass die Determinante von A gleich dem Produkt der EW sein muss. Es gilt $\det(A) = -4$ (z.B. mit Laplace Entwicklungssatz). Andererseits gilt, dass das Produkt der EW durch $4\lambda_2$ gegeben ist. Daher muss $\lambda_2 = -1$ gelten.
Lösungsvariante 2:
Wir wissen, dass die Spur von A gleich der Summe der EW sein muss. Es gilt $\mathrm{Spur}(A) = -6$. Andererseits gilt, dass die Summe der EW durch $-5 + \lambda_2$ gegeben ist. Daher muss $\lambda_2 = -1$ gelten.

ii. Ein Eigenvektor ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Eintrag b, so dass $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$ ebenfalls ein Eigenvektor ist. Zu welchem Eigenwert ist v_2 ein Eigenvektor?

Lösung:

> Für einen EV v zum EW λ gilt $Av = \lambda v$. Wir berechnen $Av_2 = \begin{pmatrix} -1+b \\ 3+b \\ -2-2b \end{pmatrix}$. Für die erste Koordinate muss gelte $-1+b = \lambda 0 = 0$, also $b = 1$. Somit ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
> Von der zweiten Koordinate können wir dann ablesen, dass v_2 ein EV zum EW $\lambda_1 = -4$ ist, da $3 + b = 4 = \lambda(-1)$ gilt.

(c) [**2 Punkte**]

i. Sei $J = \begin{pmatrix} -1 & \star & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \star \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ die Jordannormalform von A. Bestimmen Sie die Einträge auf der Nebendiagonalen, also die $\star$-Einträge.

Lösung:

> Da $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ein doppelter und $\lambda_3 = -4$ ein einfacher EW ist und die Matrix nicht diagonalisierbar ist, muss $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ gelten.

ii. Bestimmen Sie e^{Jt}.

Lösung:

> Mit den Rechenregeln aus der Vorlesung gilt $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$.

(d) [**3 Punkte**] Es sei T eine invertierbare Matrix, so dass $TJ = AT$ gilt. Für diese Matrix gilt, dass

$$Te^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{-t} & -e^{-4t} \\ 0 & \frac{2}{3}e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}_A$ des **homogenen** Systems bilden.

Lösung:

> *Lösungsvariante 1:*
> Nach Angabe gilt $A = TJT^{-1}$ (mit T invertierbar), also $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ (Skript 3.6.2). Die allgemeine Lösung des DGL-Systems ist gegeben durch $y(t) = e^{tA}C$, wobei $C \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit Konstanten ist. Da T invertierbar ist, können wir $\tilde{C} = T^{-1}C$ als neuen Konstantenvektor definieren und haben somit die allgemeine Lösung $y(t) = Te^{tJ}\tilde{C}$. Dementsprechend bilden die Spalten von Te^{tJ} eine Basis des Lösungsraums.
> *Lösungsvariante 2:*
> Seien b_1, b_2, b_3 die drei Spaltenvektoren von Te^{Jt}. Wir zeigen direkt, dass diese eine Basis des Lösungsraums bilden. Es gilt $b_1 = v_1 e^{\lambda_1 t}$, wobei v_1 ein EV zum EW λ_1 ist. Somit

gilt, dass $\frac{d}{dt}b_1 = v_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = Ab_1$. Also ist b_1 eine Lösung der DGL. Analog sieht man, dass auch b_3 eine Lösung der DGL ist. Weiters gilt durch Ausrechnen der linken und rechten Seite, $\frac{d}{dt}b_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} - te^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix} = Ab_2$. Also ist b_2 ebenfalls eine Lösung der DGL. Es bleibt zu zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind und somit eine Basis des 3-dimesionalen Lösungsraums bilden. Das sieht man z.B. wenn man $t = 0$ betrachtet, da $e^0 = E_3$ und $\det(T) \neq 0$.

(e) [**4 Punkte**] Es gilt $(TJ^{-1}T^{-1})Z(t) = -\frac{z}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des **inhomogenen** Systems und beschreiben Sie das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.

Lösung:

Sei $B(t)$ die Matrix, deren Spalten eine Basis bilden, ist $B(t)C$ eine allgemeine Lösung der homogenen DGL, wobei $C \in \mathbb{R}^3$ ein Konstantenvektor ist.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen, suchen und finden wir eine partikuläre Lösung. Da $Z(t)$ konstant ist, hat die inhomogene DGL einen Fixpunkt y_∞ (der also auch eine partikuläre Lösung ist), für den gilt

$$y'_\infty = 0 = Ay_\infty + Z.$$

Auflösen nach y_∞ ergibt (beachte dass A invertierbar ist, da alle Eigenwerte ungleich 0)

$$y_\infty = -A^{-1}Z.$$

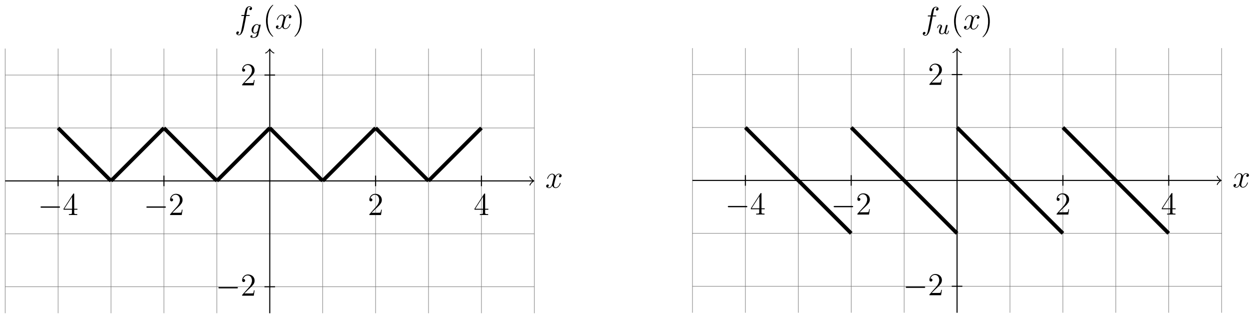
Da $A = TJT^{-1}$ folgt $A^{-1} = TJ^{-1}T^{-1}$ und somit gilt $y_\infty = -\frac{z}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(t) = y_\infty + B(t)C.$$

Für $t \to \infty$ sehen wir, dass $B(t)$ zur Nullmatrix konvergiert (für den Eintrag te^{-t} sieht man das z.B. mit L'Hôspital Satz). Daher folgt, dass $y(t) \to y_\infty$ für $t \to \infty$.

2. Sei $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - x$. Seien f_g die 2-periodische **gerade** Fortsetzung und f_u die 2-periodische **ungerade** Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$.

(a) [**2 Punkte**] Skizzieren Sie f_g, f_u jeweils im Intervall $]-4,4[$ **in Ihr Antwortheft**.
Lösung:



(b) [**8 Punkte**] Berechnen Sie für die **gerade** Fortsetzung f_g die reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_n, b_n, c_n.
Lösung:

Lösungsvariante 1:
Da f_g eine gerade Funktion ist, gilt (z.B. mit Serie 7) dass $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Koeffizienten a_n bestimmen wir mit der Formel für allgemeine Periode $T = 2$ (Skript 4.5.2). Für $n = 0$ haben wir

$$a_0 \overset{*}{=} 2\int_0^1 (1-x)\cos(0)dx = 2\left[x - x^2/2\right]_{x=0}^1 = 1.$$

Mit $*$: f_g ist gerade, siehe z.B. wieder Serie 7.
Für $n > 0$ verwenden wir partielle Integration und bekommen

$$\begin{aligned}
a_n &\overset{*}{=} 2\int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx = 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_{x=0}^1 - 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx \\
&= 0 - 2\left[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_{x=0}^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx = -0 - 2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_{x=0}^1 \\
&= \frac{2 - 2\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} = 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit $*$: $f_g \cdot \cos$ ist gerade, siehe z.B. wieder Serie 7.
Die Umformung von den reellen zu den komplexen Fourier-Koeffizienten (Skript 4.5.3) liefert für $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2}\begin{cases} 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}, & \text{für } n > 0, \\ 1, & \text{für } n = 0, \\ 2\frac{1-(-1)^{-n}}{(-n\pi)^2}, & \text{für } n < 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{(n\pi)^2}, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & \text{für } n = 0, \\ 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Lösungsvariante 2:
Wir berechnen direkt die komplexen Fourierkoeffizienten. Für $n = 0$ haben wir wegen Symmetrie

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_g(x)e^0 dx = \int_0^1 1 - x dx = \left[x - x^2/2\right]_{x=0}^1 = 1/2.$$

Für $n \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
c_n =& \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_u(x)e^{-n\pi ix}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-n\pi ix}dx + \int_0^1 (1-x)e^{-n\pi ix}dx\right) \\
=& \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-n\pi ix}dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} xe^{-n\pi ix}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{-n\pi ix}dx \\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}\right]_{x=-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[x\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}\right]_{x=-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}dx \\
&- \frac{1}{2}\left[x\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}\right]_{x=0}^{1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}dx \\
=& -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-n\pi ix}}{-(n\pi)^2}\right]_{x=-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-n\pi ix}}{-(n\pi)^2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{e^{-n\pi i} + e^{n\pi i} - 2}{-2(n\pi)^2} \\
=& \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} = \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2} = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{2}{(n\pi)^2}, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Umformung von den komplexen zu den reellen Fourier-Koeffizienten (Skript 4.5.3) liefert für $n > 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = 1, \\
a_n &= c_n + c_{-n} = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{4}{(n\pi)^2}, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = 0.
\end{aligned}$$

(c) **[3 Punkte]** Sei $\mathcal{P}_{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 auf $[-1,1]$. Für $p, q \in \mathcal{P}_{\leq 3}$ ist das Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.
Seien p, q gegeben durch $p(x) = 7x^3 - 3x$ und $q(x) = ax^2 + bx + 5$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Wie müssen a und b gewählt werden, dass p und q orthogonal sind?
Lösung:

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle p, q\rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} a(7x^5 - 3x^3) + b(7x^4 - 3x^2) + 5(7x^3 - 3x)dx \\ &= 0 + b\left[\frac{7}{5}x^5 - x^3\right]_{x=-1}^{1} + 0 = b\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Für Orthogonalität muss $\langle p, q\rangle = 0$ gelten, daher folgt $b = 0$ während $a \in \mathbb{R}$ beliebig sein kann.

3. Sei $a > 0$ eine Konstante. Wir betrachten für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ein nichtlineares System $x'(t) = F(x(t))$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t)) = a(x_1(t)x_2(t) - x_1(t)^2), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)) = \cos(x_1(t)) - \sin(x_2(t)). \end{aligned}$$

(a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Eintrag $B \in [0, 2\pi]$ so, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt (stationäre Lösung) des Systems ist.

Lösung:

Eine stationäre Lösung erfüllt $x'(t) = F(x(t)) = 0$. Wir betrachten zuerst die Gleichung $x_1'(t) = 0$, welche äquivalent ist zu $x_1x_2 = x_1^2$. Da $x_1 = 0$, ist diese Gleichung immer erfüllt und aus der Gleichung $x_2'(t) = 0$ folgt $\sin(x_2) = \cos(0) = 1$, was erfüllt ist für $x_2 = \pi/2$. Somit haben wir $B = \pi/2$ und den Fixpunkt

$$x_\infty^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix}.$$

(b) [**1 Punkte**] Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Ausrechnen der jeweiligen Matrix-Einträge ergibt

$$DF(x) = \begin{pmatrix} a(x_2 - 2x_1) & ax_1 \\ -\sin(x_1) & -\cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

(c) [**4 Punkte**] Ein weiterer Fixpunkt ist $x_\infty = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie den Verlauf $x(t)$ einer Lösung in der Nähe von x_∞ für $t \to \infty$.

Lösung:

Lösungsvariante 1:

Einsetzen in die Jacobimatrix ergibt $DF(x_\infty) = \begin{pmatrix} -a\pi/4 & a\pi/4 \\ -\sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix}$. Wir berechnen $\det(DF(x_\infty)) = a\pi\sqrt{2}/4$ und $\mathrm{Spur}(DF(x_\infty)) = -(a\pi/4 + \sqrt{1/2})$. Da $a > 0$, ist die Determinante positiv und die Spur negativ, daher folgt (siehe MC Serie 9), dass der FP stabil ist und sich $x(t)$ dem FP annähert für $t \to \infty$.

Anmerkung: Wenn die Determinante positiv und die Spur negativ ist, dann gilt mit der Formel für die EW von DF (siehe MC Serie 9), dass beide EW negativen Realteil haben. Daher ist der Satz von Hartman-Grobman anwendbar und liefert, dass es sich um einen stabilen Fixpunkt handelt.

Lösungsvariante 2:

Einsetzen in die Jacobimatrix ergibt $DF(x_\infty) = \begin{pmatrix} -a\pi/4 & a\pi/4 \\ -\sqrt{1/2} & -\sqrt{1/2} \end{pmatrix}$. Wir berechnen das charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = (-a\pi/4 - \lambda)(-\sqrt{1/2} - \lambda) + a\pi/4\sqrt{1/2} = \lambda^2 + \lambda(a\pi/4 + \sqrt{1/2}) + a\pi/2\sqrt{1/2}$$

und die Eigenwerte von $DF(x_\infty)$ als dessen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a\pi/4 + \sqrt{1/2}) \pm \sqrt{(a\pi/4 + \sqrt{1/2})^2 - 4a\pi/2\sqrt{1/2}}}{2}$$

Wir können sehen, dass beide Eigenwerte negativen Realteil haben, daher ist der Satz von Hartman-Grobman anwendbar und liefert, dass es sich um einen stabilen Fixpunkt handelt.

4. Unter einem Nikotinpflaster hat die Konzentration u des Nikotins in der Haut zunächst den konstanten Wert c. Zur Zeit $t = 0$ wird das Pflaster entfernt, woraufhin das Nikotin durch Diffusion ins Körperinnere abtransportiert wird. Wir modellieren diesen Vorgang durch die Diffusionsgleichung

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{für } x \in]0,\pi[, t > 0. \tag{PDE}$$

Dabei bezeichnet $u(x,t)$ die Nikotinkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ an der Stelle $x \in [0,\pi]$. Die Konzentration zur Zeit $t = 0$ ist c, das heisst es gilt die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = c \quad \text{für } x \in]0,\pi[. \tag{AB}$$

Am Rand des Pflasters sei die Konzentration 0, das heisst es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0. \tag{RB}$$

(a) [**6 Punkte**] Bestimmen Sie durch den Separationsansatz $u(x,t) = \sin(\omega x)T(t)$, mit $\omega > 0$, alle Lösungen dieser Form von (PDE), welche den Randbedingungen (RB) genügen.

Lösung:

Mit dem gegebenen Separationsansatz erhalten wir die (PDE)

$$\sin(\omega x)T'(t) = -\omega^2 \sin(\omega x)T(t),$$

welche wir durch $\sin(\omega x)T(t)$ dividieren um auf

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

zu kommen. Dies ist equivalent zu der DGL

$$T'(t) = -\omega^2 T(t),$$

welche die allgemeine Lösung

$$T(t) = A\exp(-\omega^2 t)$$

hat, wobei $A \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die allgemeine Lösung der gewünschten Form der (PDE) ist demnach

$$u(x,t) = A\sin(\omega x)\exp(-\omega^2 t).$$

Die (RB) erfordern nun $0 = u(0,t) = A\sin(0)\exp(-\omega^2 t) = 0$ was immer erfüllt ist und $0 = u(\pi,t) = A\sin(\omega\pi)\exp(-\omega^2 t)$ was für $A \neq 0$ equivalent ist zu (da $\exp > 0$) $\sin(\omega\pi) = 0$. Diese Bedingung ist erfüllt wenn

$$\omega \in \mathbb{N}.$$

Daher erhalten wir die allgemeine Lösung von der gewünschten Form von (PDE) die auch die (RB) erfüllen als

$$u_n(x,t) = A_n \sin(nx) \exp(-n^2 t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) [**5 Punkte**] Durch Superposition der in (a) gefundenen Lösungen bestimmen Sie nun diejenige Lösung von (PDE) und (RB), welche auch die Anfangsbedingung (AB) erfüllt.

Hinweis: Setzen Sie die Anfangsbedingung (AB) auf dem Intervall $0 < x < \pi$ als ungerade Funktion 2π-periodisch fort, und berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Funktion.

Lösung:

Um mit den Sinus-Termen die Möglichkeit zu haben die Randbedingung zu erfüllen, setzen wir die Funktion $f(x) = c$, für $x \in]0, \pi[$ ungerade und 2π-periodisch als f_u fort. Wir berechnen die entsprechende Fourier-Koeffizienten um diese Fortsetzung als Fourier-Reihe zu schreiben. Die f_u nach unserer Wahl ungerade ist, sind alle Koeffizienten a_n der cos-Terme 0. Die Koeffizienten der ungeraden Terme berechnen wir für $n \geq 1$ als

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi c \sin(nx) dx = \frac{2c}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2c}{n\pi} \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \\ &= \frac{2c}{n\pi} \begin{cases} 2, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $f_u(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{4c}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x)$.
Superposition der Lösungen aus (a) ergibt die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty A_n \sin(nx) \exp(-n^2 t).$$

Um die Anfangsbedingung (AB) zu erfüllen muss gelten

$$c = u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty A_n \sin(nx), \quad x \in]0, \pi[.$$

Da ebenfalls gilt

$$c = f_u(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx), \quad x \in]0, \pi[,$$

können wir mittels Koeffizientenvergleich folgern, dass $A_n = b_n$ gelten muss. Somit erhalten wir die Lösung u von (PDE) welche (RB) und (AB) erfüllt als

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{4c}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x) \exp(-(2k+1)^2 t).$$

(c) [**4 Punkte**] Beantworten Sie folgende Frage, indem Sie nur den ersten Term der Lösung aus der Teilaufgabe (b) verwenden: Zu welchem Zeitpunkt t ist die maximale Nikotinkonzentration auf den Wert $c/2$ gesunken?

Lösung:

Wir verwenden $\tilde{u}(x,t) = \frac{4c}{\pi}\sin(x)\exp(-t)$ um die Fragestellung zu beantworten. Wir sind für $t \geq 0$ an dem Maximum der Konzentration $\tilde{u}$ für $x \in (0,\pi)$ interessiert. Das Maximum wird unabhängig von t immer bei $\tilde{x} = \pi/2$ angenommen, da dort $\sin(\tilde{x}) = 1$ gilt (und sin Werte in $[-1,1]$ annimmt). Wir wollen also $t \geq 0$ bestimmen so dass

$$c/2 \overset{!}{=} \tilde{u}(\tilde{x},t) = \frac{4c}{\pi}\exp(-t),$$

gilt. Das ist erfüllt für $t = -\log(\pi/8) = \log(8/\pi) > 0$.