D–HEST / Lehrdiplom Mathematik

Prüfung Mathematik III

401-0293-00L

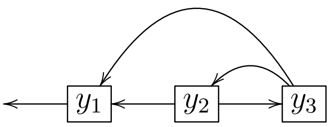
Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, und sei $Z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $z > 0$ konstant.

Wir betrachten das inhomogene DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ für $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

(a) [**2 Punkte**] Betrachten Sie das folgende Modell.



i. Beschriften Sie **in ihrem Antwortheft** die Pfeile so, dass das **homogene** DGL-System dazu passt.

ii. Ergänzen Sie dann das Modell **in ihrem Antwortheft** so, dass das gegebene **inhomogene** DGL-System dazu passt.

(b) [**4 Punkte**] Die Matrix A ist **nicht** diagonalisierbar und hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_3 = -4$.

i. Bestimmen Sie den dritten Eigenwert λ_2.

ii. Ein Eigenvektor ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Eintrag b, so dass $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$ ebenfalls ein Eigenvektor ist. Zu welchem Eigenwert ist v_2 ein Eigenvektor?

(c) [**2 Punkte**]

i. Sei $J = \begin{pmatrix} -1 & \star & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \star \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ die Jordannormalform von A. Bestimmen Sie die Einträge auf der Nebendiagonalen, also die $\star$-Einträge.

ii. Bestimmen Sie e^{Jt}.

(d) [**3 Punkte**] Es sei T eine invertierbare Matrix, so dass $TJ = AT$ gilt. Für diese Matrix gilt, dass

$$Te^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{-t} & -e^{-4t} \\ 0 & \frac{2}{3}e^{-t} & e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}_A$ des **homogenen** Systems bilden.

(e) [**4 Punkte**] Es gilt $(TJ^{-1}T^{-1})Z(t) = -\frac{z}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des **inhomogenen** Systems und beschreiben Sie das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$.

2. Sei $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - x$. Seien f_g die 2-periodische **gerade** Fortsetzung und f_u die 2-periodische **ungerade** Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$.

(a) [**2 Punkte**] Skizzieren Sie f_g, f_u jeweils im Intervall $]-4,4[$ **in Ihr Antwortheft**.

(b) [**8 Punkte**] Berechnen Sie für die **gerade** Fortsetzung f_g die reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_n, b_n, c_n.

(c) [**3 Punkte**] Sei $\mathcal{P}_{\leq 3}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 auf $[-1,1]$. Für $p,q \in \mathcal{P}_{\leq 3}$ ist das Skalarprodukt $\langle p,q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.
Seien p,q gegeben durch $p(x) = 7x^3 - 3x$ und $q(x) = ax^2 + bx + 5$, wobei $a,b \in \mathbb{R}$.
Wie müssen a und b gewählt werden, dass p und q orthogonal sind?

3. Sei $a > 0$ eine Konstante. Wir betrachten für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ein nichtlineares System $x'(t) = F(x(t))$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t)) = a(x_1(t)x_2(t) - x_1(t)^2), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)) = \cos(x_1(t)) - \sin(x_2(t)). \end{aligned}$$

(a) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Eintrag $B \in [0, 2\pi]$ so, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ ein Fixpunkt (stationäre Lösung) des Systems ist.

(b) [**1 Punkte**] Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.

(c) [**4 Punkte**] Ein weiterer Fixpunkt ist $x_\infty = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie den Verlauf $x(t)$ einer Lösung in der Nähe von x_∞ für $t \to \infty$.

4. Unter einem Nikotinpflaster hat die Konzentration u des Nikotins in der Haut zunächst den konstanten Wert c. Zur Zeit $t = 0$ wird das Pflaster entfernt, woraufhin das Nikotin durch Diffusion ins Körperinnere abtransportiert wird. Wir modellieren diesen Vorgang durch die Diffusionsgleichung

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{für } x \in]0,\pi[, t > 0. \tag{PDE}$$

Dabei bezeichnet $u(x,t)$ die Nikotinkonzentration zur Zeit $t \geq 0$ an der Stelle $x \in [0,\pi]$. Die Konzentration zur Zeit $t = 0$ ist c, das heisst es gilt die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = c \quad \text{für } x \in]0,\pi[. \tag{AB}$$

Am Rand des Pflasters sei die Konzentration 0, das heisst es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0. \tag{RB}$$

(a) [**6 Punkte**] Bestimmen Sie durch den Separationsansatz $u(x,t) = \sin(\omega x)T(t)$, mit $\omega > 0$, alle Lösungen dieser Form von (PDE), welche den Randbedingungen (RB) genügen.

(b) [**5 Punkte**] Durch Superposition der in (a) gefundenen Lösungen bestimmen Sie nun diejenige Lösung von (PDE) und (RB), welche auch die Anfangsbedingung (AB) erfüllt.

Hinweis: Setzen Sie die Anfangsbedingung (AB) auf dem Intervall $0 < x < \pi$ als ungerade Funktion 2π-periodisch fort, und berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Funktion.

(c) [**4 Punkte**] Beantworten Sie folgende Frage, indem Sie nur den ersten Term der Lösung aus der Teilaufgabe (b) verwenden: Zu welchem Zeitpunkt t ist die maximale Nikotinkonzentration auf den Wert $c/2$ gesunken?