D-HEST
Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

Mathematik III

HS 2012

Prüfung HS2012
Lösungsvorschlag

1. Gegeben sei folgendes 4-Box-Kompartiment-Modell mit $0 \le a, b, c < 1$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{K_1 = \text{Muskel}} \arrow[r, "a"] & \boxed{K_2 = \text{Blut}} \arrow[r, "c"] \arrow[d, shift right, "b"'] & \boxed{K_4 = \text{Niere}} \\
& \boxed{K_3 = \text{Leber}} \arrow[u, bend right, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Funktion $y_i : t \mapsto y_i(t)$ mit $t \geq 0$ gebe die Entwicklung einer Substanz in K_i an.

a) Seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und } A \in M_{4\times 4}.$$

Ein lineares DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den vier Kompartimenten K_1, K_2, K_3, K_4.

Bestimmen Sie die Matrix A.
Lösung:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ a & -b-c & c & 0 \\ 0 & b & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} y(t)$$

b) Sei nun $c = 0$. Dann bestehen eine Zeile und zwei Spalten von A aus lauter Nullen. Durch Streichen der Nullzeile und einer Nullspalte erhalten wir eine (3×3)-Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun das (3×3)-System

$$y'(t) = B \cdot y(t)$$

mit $y(t), y'(t) \in \mathbb{R}^3$ und $0 < a, b < 1$.

Finden Sie alle stationären Lösungen $y_\infty : t \mapsto y_\infty(t) = \begin{pmatrix} y_{\infty,1}(t) \\ y_{\infty,2}(t) \\ y_{\infty,3}(t) \end{pmatrix}$ des Systems.

Lösung:
Für eine stationäre Lösungsfunktion y_∞ gilt $y'_\infty = 0$,

$$0 \overset{!}{=} y'_\infty(t) = B \cdot y_\infty = \begin{pmatrix} -ay_{\infty,1} \\ ay_{\infty,1} - by_{\infty,2} \\ by_{\infty,2} \end{pmatrix} \Rightarrow y_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \text{ wobei } d \text{ beliebig.}$$

Bitte wenden!

c) Gegeben seien das System aus Teil **b)** $y'(t) = B \cdot y(t)$ und ein Startwert $y(0) = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $y_{0,1} > 0$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über die Lösungsfunktion $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie jeweils die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

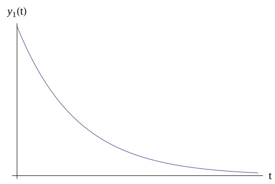
richtig	**falsch**	
◯	◯	Die Lösungsfunktion y konvergiert gegen eine stationäre Lösung.
◯	◯	Für $a = b$ ist die Lösungsfunktion y periodisch.
◯	◯	Die Lösungsfunktion y_2 für das Kompartiment K_2 ist monoton fallend.
◯	◯	Die Lösungsfunktion y_3 für das Kompartiment K_3 ist monoton wachsend.

Lösung:

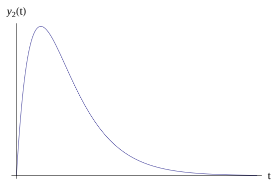
In der Vorlesung (vom 08.10.2012) wurden Lösungskurven für das 3-Box-Kompartiment-Modell

$$\boxed{K_1} \xrightarrow[b_1]{} \boxed{K_2} \xrightarrow[b_2]{} \boxed{K_3}$$

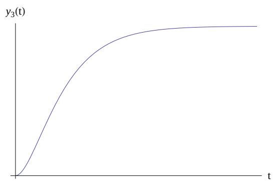
diskutiert, mit $b_1 \neq b_2$ und $y(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:



y_1



y_2



y_3

mit

$y_1(t) = y_0 e^{-b_1 t}$

$y_2(t) = \frac{y_0 b_1}{b_2 - b_1}(e^{-b_1 t} - e^{-b_2 t})$

$y_3(t) = \frac{y_0}{b_2 - b_1}(b_1(e^{-b_2 t} - 1) - b_2(e^{-b_1 t} - 1))$

In der Notation hier:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{0,1} e^{-at} \\ \frac{a y_{0,1}}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at}) \\ y_{0,1}(1 - \frac{1}{a-b}(ae^{-bt} - be^{-at}) \end{pmatrix}.$$

Alternative (auch in der VL vom 8.10.):

Die Eigenwerte $-a, -b, 0$ der (Dreiecksmatrix) B lassen sich direkt auf der Diagonalen ablesen, damit ist für $a \neq b$ die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{-at} v_1 + C_2 e^{-bt} v_2 + C_3 y_\infty$$

wobei die Konstanten C_1, C_2, C_3 durch den Startwert $y(0)$ bestimmt sind. Falls $a = b$ ist die allgemeine Lösung allenfalls

$$y(t) = C_1 e^{-at} v_1 + C_2 \cdot t \cdot e^{-at} v_2 + C_3 y_\infty$$

Damit folgt

Siehe nächstes Blatt!

richtig: Die Lösung konvergiert gegen $C \cdot (0, 0, y_{1,0})^\top$, da $-a, -b$ reell und negativ sind. Das ist aber auch intuitiv einleuchtend: Die Gesamtmenge landet schliesslich in K_3.

falsch: Nein, falls $a = b$, erhalten wir nicht periodische Terme der Form e^{-at} und/oder $t \cdot e^{-at}$. Periodische Lösungen erhalten wir allenfalls bei imaginären Eigenwerten.

falsch: Nein, y_2 wächst am Anfang, und ist fallend nach dem Zeitpunkt

$$t_{max} = \frac{\log(a) - \log(b)}{a - b}.$$

Wieder hilft die Intuition: Zu Beginn ist K_2 leer.

richtig: Stimmt, da $y_3'(t) = by_2(t) \geq 0$. Intuitiv: Zu Beginn ist K_3 leer, dann wandert die Gesamtmenge in K_3

d) Seien $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$. Dann sind

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung des Systems $y'(t) = B \cdot y(t)$

$$t \mapsto y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{1}{4} \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Einträge **X** und **Z**.

Lösung:

Die Matrix B hat drei paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte, also gibt es eine Basis aus Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 (mit EW λ_i), und die allgemeine Lösung des Systems ist von der Form:

$$t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 \cdot t} v_3.$$

Mithin ist $(0, \mathbf{X}, 1)^\top$ EV zum EW 0 und $(1, -2, \mathbf{Z})^\top$ EV zum $-\frac{1}{2}$. Somit

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}\mathbf{X} \\ \frac{1}{4}\mathbf{X} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = 0$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{Z} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z} = 1.$$

2. Seien $a, k > 0$ reelle Zahlen. Wir betrachten eine Population y, welche sich im Laufe der Zeit $t \geq 0$ nach folgender Gleichung entwickle:

$$y'(t) = y(t)(a - y(t)) - k, \quad y(t) \geq 0.$$

a) Sei $k = 1$. Dann erhalten wir die DGL

$$y'(t) = y(t)(a - y(t)) - 1.$$

i.) Bestimmen Sie die Fixpunkte (Gleichgewichtslösungen) in Abhängigkeit von a.

ii.) Sei $a > 2$.
Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen stabilen oder instabilen Fixpunkt handelt.

Hinweis: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

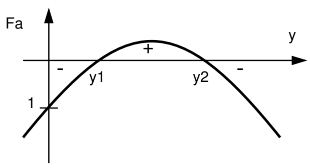
$$y \mapsto F_a(y) = y(a - y) - 1.$$

Lösung:
Die Fixpunkte y^∞ sind die Nullstellen von F_a, also

$$0 \stackrel{!}{=} F_a(y) = -y^2 + ay - 1 \;\Rightarrow\; y^\infty_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}).$$

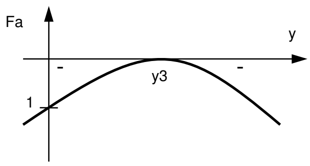
Unterscheiden wir die Fälle $a^2 - 4 > 0, = 0, < 0$:

1. Falls $a^2 - 4$ positiv ist (d.h. $a > 2$), ist der Graph von F_a

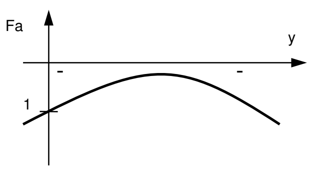


und $F_a(y) > 0$ für $y \in]y_1^\infty, y_2^\infty[$ und $F_a(y) \leq 0$ sonst. Somit ist der kleinere Fixpunkt $y_1^\infty = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4}) > 0$ instabil und der grössere $y_2^\infty = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$ stabil.

2. Falls $a = 2$, hat F_a eine doppelte Nullstelle, und es gibt nur einen Fixpunkt $y^\infty = \frac{a}{2} = 1$ mit $F_a'(y^\infty) = 0$, über dessen Stabilität wir keine Aussage machen können.



3. Falls $a < 2$, gibt es keine (reellen) Nullstellen und damit keine Fixpunkte.



Eine Lösungsfunktion y ist streng monoton fallend, da immer $F_a = y' < 0$ gilt. Die durch y beschriebene Population stirbt aus, wenn die Kapazitätsgrenze a zu klein ist.

b) Sei nun $a = 8$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie jeweils die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

Siehe nächstes Blatt!

richtig	falsch	
◯	◯	Mit $k = 18$ und Anfangspopulation $y_0 = 10$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 15$ und Anfangspopulation $y_0 = 4$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 12$ und Anfangspopulation $y_0 = 3$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 8$ und Anfangspopulation $y_0 = 1$ stirbt die Population aus.

Lösung:
Mit $a = 8$ erhalten wir als Fixpunkte

$$y_{1,2}^{\infty} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4k}) = 4 \pm \sqrt{16 - k}.$$

Die Population stirbt **nicht** aus, falls es zwei Fixpunkte gibt ($k < 16$) und y_0 grösser als der kleinere Fixpunkt y_1^{∞} ist, $y_0 > 4 - \sqrt{16 - k}$.

Antworten:

richtig: $k = 18 > 16$,
falsch: $y_1^{\infty} = 4 - \sqrt{16 - 15} = 3 < y_0 = 4$,
falsch: $y_1^{\infty} = 4 - \sqrt{16 - 12} = 2 < y_0 = 3$,
richtig: $y_1^{\infty} = 4 - \sqrt{16 - 8} > 4 - \sqrt{16 - 7} = 1 = y_0$.

c) Sei $a > 0$ eine reelle Zahl.

Gegeben sei folgendes Räuber-Beute-Modell nach Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{2}x(t) + x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= y(t)(a - y(t)) - 1 - x(t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Mit $x(t), y(t) \geq 0$.

i.) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems in Abhängigkeit von a.
ii.) Für welche $a > 0$ gibt es genau einen Fixpunkt?

Lösung:
Setzen wir die erste Gleichung gleich Null: $x' = 0 \;\Rightarrow\; x(y - \frac{1}{2}) = 0$. Dann haben wir zwei Fälle:

1. $x^{\infty} = 0$. Dann setzen wir wie in **a)** fort.
2. $y^{\infty} = \dfrac{1}{2}$. Dann ist
   $$y' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{x^{\infty}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x^{\infty} = a - \frac{5}{2} \geq 0, \text{ falls } a \geq \frac{5}{2}.$$

Die Fixpunkte (x^{∞}, y^{∞}) sind also

- $(0, \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}))$, wobei x^{∞} reell ist für $a \geq 2$,
- $(a - \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, wobei $x^{\infty} \geq 0$, falls $a \geq \frac{5}{2}$.

Für $2 < a < \dfrac{5}{2}$ sind $(0, \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4}))$ zwei Fixpunkte. Für $a < 2$ existiert keinen Fixpunkt.
Und für $a = 2$ erhalten wir genau einen Fixpunkt, $(0, 1)$.

Bitte wenden!

3. Lösen Sie für $D > 0$ die Diffusionsgleichung

$$u_t = Du_{xx} - u \tag{PDE}$$

auf dem Intervall $x \in [0, L]$. Dabei sind die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \\ u(L,t) &= 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \end{aligned} \tag{RB}$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \cos(\tfrac{3\pi x}{2L}) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{5\pi x}{2L}) \qquad \text{für } 0 \leq x \leq L \tag{AB}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie zunächst Lösungen von (PDE) der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

welche den Randbedingungen (RB) genügen.

Lösung:

(PDE) : $X\dot{T} = DX''T - XT \;\Rightarrow\; \dfrac{\dot{T}}{T} = D\dfrac{X''}{X} - 1 = \lambda \;(const)$

Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen, schreiben wir $\lambda = -D\omega^2 - 1$

$\Rightarrow\; X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$

und $T(t) = C\exp\left\{(-D\omega^2 - 1)t\right\}$.

(RB) : $u_x(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; B\omega = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$ (oder $\omega = 0 \;\Rightarrow$ triviale Lösung $u \equiv 0$).

$u(L,t) = 0 \;\Rightarrow\; A\cos(\omega L) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_k = (\pi k + \frac{\pi}{2})/L = \frac{\pi}{2L}(2k+1).$

Also $const \times \cos(\omega_k x)\exp\left\{(-D\omega_k^2 - 1)t\right\}$ erfüllt (PDE) und (RB).

b) Bestimmen Sie durch Superposition der in (a) gefundenen Lösungen eine allgemeine Lösung von (PDE) und (RB).

Lösung:

Superposition: $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\omega_k x)\exp\left\{(-D\omega_k^2 - 1)t\right\}.$

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten in der unter (b) gefundenen allgemeinen Lösung so, dass auch (AB) erfüllt ist.

Lösung:

(AB) : $u(x,0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\omega_k x) = \cos(\tfrac{3\pi x}{2L}) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{5\pi x}{2L})$

$\Rightarrow\; C_1 = 1,\; C_2 = -\frac{1}{2},$ andere $C_k = 0.$

also $u(x,t) = \cos(\frac{3\pi x}{2L})\exp\left\{(-D(\frac{3\pi}{2L})^2 - 1)t\right\} - \frac{1}{2}\cos(\frac{5\pi x}{2L})\exp\left\{(-D(\frac{5\pi}{2L})^2 - 1)t\right\}.$