Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

ETH Zürich, Januar 2013

HST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle		
	MC	Total	MC	Total	Max
1					12
2					12
3	-		-		12
Total					36

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen Sie nicht begründen.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

1. Gegeben sei folgendes 4-Box-Kompartiment-Modell mit $0 \leq a, b, c < 1$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{K_1 = \text{Muskel}} \arrow[r, "a"] & \boxed{K_2 = \text{Blut}} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "b"', shift right] & \boxed{K_4 = \text{Niere}} \\
& \boxed{K_3 = \text{Leber}} \arrow[u, bend right, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Funktion $y_i : t \mapsto y_i(t)$ mit $t \geq 0$ gebe die Entwicklung einer Substanz in K_i an.

a) Seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{pmatrix} \text{ und } A \in M_{4\times 4}.$$

Ein lineares DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den vier Kompartimenten K_1, K_2, K_3, K_4.

Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Sei nun $c = 0$. Dann bestehen eine Zeile und zwei Spalten von A aus lauter Nullen. Durch Streichen der Nullzeile und einer Nullspalte erhalten wir eine (3×3)-Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun das (3×3)-System

$$y'(t) = B \cdot y(t)$$

mit $y(t), y'(t) \in \mathbb{R}^3$ und $0 < a, b < 1$.

Finden Sie alle stationären Lösungen $y_\infty : t \mapsto y_\infty(t) = \begin{pmatrix} y_{\infty,1}(t) \\ y_{\infty,2}(t) \\ y_{\infty,3}(t) \end{pmatrix}$ des Systems.

c) Gegeben seien das System aus Teil **b)** $y'(t) = B \cdot y(t)$ und ein Startwert $y(0) = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $y_{0,1} > 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über die Lösungsfunktion $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie jeweils die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Die Lösungsfunktion y konvergiert gegen eine stationäre Lösung.
○	○	Für $a = b$ ist die Lösungsfunktion y periodisch.
○	○	Die Lösungsfunktion y_2 für das Kompartiment K_2 ist monoton fallend.
○	○	Die Lösungsfunktion y_3 für das Kompartiment K_3 ist monoton wachsend.

Bitte wenden!

d) Seien $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$. Dann sind

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung des Systems $y'(t) = B \cdot y(t)$

$$t \mapsto y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{1}{4} \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Einträge **X** und **Z**.

Siehe nächstes Blatt!

2. Seien $a, k > 0$ reelle Zahlen. Wir betrachten eine Population y, welche sich im Laufe der Zeit $t \geq 0$ nach folgender Gleichung entwickle:

$$y'(t) = y(t)(a - y(t)) - k, \quad y(t) \geq 0.$$

a) Sei $k = 1$. Dann erhalten wir die DGL

$$y'(t) = y(t)(a - y(t)) - 1.$$

i.) Bestimmen Sie die Fixpunkte (Gleichgewichtslösungen) in Abhängigkeit von a.

ii.) Sei $a > 2$.
Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen stabilen oder instabilen Fixpunkt handelt.

Hinweis: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$y \mapsto F_a(y) = y(a - y) - 1.$$

b) Sei nun $a = 8$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie jeweils die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
◯	◯	Mit $k = 18$ und Anfangspopulation $y_0 = 10$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 15$ und Anfangspopulation $y_0 = 4$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 12$ und Anfangspopulation $y_0 = 3$ stirbt die Population aus.
◯	◯	Mit $k = 8$ und Anfangspopulation $y_0 = 1$ stirbt die Population aus.

c) Sei $a > 0$ eine reelle Zahl.

Gegeben sei folgendes Räuber-Beute-Modell nach Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{2}x(t) + x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= y(t)(a - y(t)) - 1 - x(t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Mit $x(t), y(t) \geq 0$.

i.) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems in Abhängigkeit von a.

ii.) Für welche $a > 0$ gibt es genau einen Fixpunkt?

3. Lösen Sie für $D > 0$ die Diffusionsgleichung

$$u_t = Du_{xx} - u \tag{PDE}$$

auf dem Intervall $x \in [0, L]$. Dabei sind die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \\ u(L,t) &= 0 \qquad \text{für } t \geq 0 \end{aligned} \tag{RB}$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \cos(\tfrac{3\pi x}{2L}) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{5\pi x}{2L}) \qquad \text{für } 0 \leq x \leq L \tag{AB}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie zunächst Lösungen von (PDE) der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

welche den Randbedingungen (RB) genügen.

b) Bestimmen Sie durch Superposition der in (a) gefundenen Lösungen eine allgemeine Lösung von (PDE) und (RB).

c) Bestimmen Sie die Koeffizienten in der unter (b) gefundenen allgemeinen Lösung so, dass auch (AB) erfüllt ist.