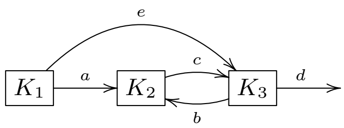
D-HEST
Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

Prüfung Februar 2017
Lösung

1. a)



b) Für eine stationäre Lösungsfunktion y_∞ gilt $y'_\infty = 0$,
Das heisst, es gibt einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems genau dann, wenn das homogene LGS eine nichttriviale Lösung hat, also genau dann wenn, $\det(A) = 0$. Also:

i) richtig, weil $A = \begin{pmatrix} -a-e & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ e & c & -b \end{pmatrix}$ und $\det(A) = 0$.

ii) falsch, weil $A = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 \\ 0 & -c & b \\ e & c & -b-d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = -ecd \neq 0$

iii) falsch, weil $A = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ 0 & c & -b-d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = -acd \neq 0$

iv) richtig, weil $A = \begin{pmatrix} -a-e & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ e & 0 & -b-d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = 0$.

c) Die Matrix (mit $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$,$d = e = 0$)

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

hat drei paarweise voneinander verschiedene Eigenwerte, also gibt es eine Basis aus Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 (mit EW λ_i), und die allgemeine Lösung des Systems ist von der Form:

$$t \mapsto y(t) = C_1 e^{\lambda_1 \cdot t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 \cdot t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 \cdot t} v_3.$$

Mit den Angaben einer Basis aus der Aufgabe bestimmen wir den EW λ_1 durch

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 0.$$

und EW λ_3 durch

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \lambda_3 = -1.$$

Um einen Eigenvektor v_2 zum EW $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$ zu finden, lösen wir das Gleichungssystem

Bitte wenden!

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Alle EV zum EW $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ sind skalare Vielfache $\neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ dieses Vektors. **11**

d) Ein stationärer Zustand erfüllt die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 2\\0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}.$$

Zwei Schritte des Gauss-Verfahrens für dieses inhomogene LGS ergeben

$$0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}P\\P+Q\\P+Q+R\end{pmatrix}.$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist genau dann gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix, wenn $P+Q+R=0$ gilt.

In diesem Fall haben wir dann unendlich viele Lösungen.

Siehe nächstes Blatt!

2. a) Für eine ungerade Funktion sind die Koeffizienten a_n gleich Null.
Das heisst, wir wählen $p = 0, q \neq 0$ beliebig und $r = 0$.

Ist die Funktion hingegen gerade, dann sind alle $b_n = 0$. Die Funktion ist zum Beispiel gerade und nicht konstant für $p \neq 0$ beliebig, $q = 0$ und r beliebig.

b) Wir wissen aus Teil a), dass bei der Wahl $p = 2, q = 0$ und $r = 1$ die Koeffizienten $b_n = 0$ sind. Zunächst berechnen wir den Koeffizienten a_0 unter Beachtung der Periode $T = 2$ und der Tatsache, dass die Funktion gerade ist:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 \int_0^1 (2x^2 + 1)dx = \frac{10}{3}.$$

Nun folgen die Koeffizienten für $n \geq 1$ durch

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x)dx &= 2 \int_0^1 (2x^2 + 1) \cos(n\pi x)dx \\ &= 2 \left[\underbrace{(2x^2 + 1) \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_0^1}_{=0} - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin(n\pi x)dx \right] \\ &= -\frac{8}{n\pi} \int_0^1 x \sin(n\pi x)dx \\ &= -\frac{8}{n\pi} \left[-\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + \underbrace{\frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x)dx}_{=0} \right] \\ &= \frac{8(-1)^n}{(n\pi)^2} \end{aligned}$$

c) Die Koeffizienten der Komplexen Fourier-Reihe kann man mit folgenden Formeln direkt angeben:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0 = \frac{5}{3} \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist somit:

$$g(x) = \frac{5}{3} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} e^{inx}$$

Bitte wenden!

3. In 2 Dimensionen lautet die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}), \tag{PDE}$$

wobei $D > 0$ die Temperaturleitfähigkeit des Mediums ist.

a) Falls u eine stationäre Temperaturverteilung ist, d.h. $u_t = 0$, erhalten wir $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Der Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ ergibt

$$X''Y + Y''X = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \text{ (konstant.)}$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} X'' - \omega^2 X = 0 & \text{(DE1)} \\ Y'' + \omega^2 Y = 0 & \text{(DE2)} \end{cases}$$

b) (DE1) ergibt

$$Y(y) = A\cos(\omega y) + B\sin(\omega y).$$

Aus $Y(0) = 0$ (RB) folgt $A = 0$,
und aus $Y(\pi) = 0$ folgt $\sin(\omega\pi) = 0$. Somit erhalten wir $\omega = k$, $k \in \mathbb{N}_0$.
(oder $B = 0$, in welchem Fall wir die triviale Lösung $Y \equiv 0$ erhalten). Also

$$Y(y) = B\sin(ky), k \in \mathbb{N}_0,$$

(wobei zu beachten ist, dass wir negative Werte von k ausgelassen haben, so dass die Lösungen linear unabhängig sind.)

c) (DE2) ergibt

$$X(x) = C\mathrm{e}^{\omega x} + D\mathrm{e}^{-\omega x}.$$

Aus $X(0) = 0$ (RB) folgt $D = -C$. Also

$$X(x) = C(\mathrm{e}^{kx} - \mathrm{e}^{-kx}), \ k \in \mathbb{N}_0.$$

d) Superposition: $u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(ky)(\mathrm{e}^{kx} - \mathrm{e}^{-kx})$.
Wir setzen $x = \pi$ und erhalten mittels Koeffizientenvergleich mit $\sin(4y)$

$$C_4 = \frac{1}{\mathrm{e}^{4\pi} - \mathrm{e}^{-4\pi}} \text{ und } C_k = 0 \text{ sonst.}$$

Also $u(x, y) = \sin(4y)\dfrac{\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{4\pi} - \mathrm{e}^{-4\pi}} = \sin(4y)\dfrac{\sinh(4x)}{\sinh(4\pi)}$.

e) Die Funktion u ist eine harmonische Funktion. Das Maximumprinzip sagt aus, dass das Maximum auf dem Rand von Q angenommen wird.
Auf drei Seiten von Q ist die Lösung $u = 0$. Auf der vierten Seite ist $u(\pi, y) = \sin(4y)$ für $y \in [0, \pi]$.
Wir suchen kritische Punkte und setzen deshalb $u_y(\pi, y) = 0$:

$$u_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos(4y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\},$$

einsetzen in $u(\pi, y)$ ergibt

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) = 1 \text{ und } \sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{7\pi}{2}) = -1.$$

Damit nimmt die Lösung u ihren Maximalwert 1 in den Punkten $(\pi, \frac{\pi}{8})$ und $(\pi, \frac{5\pi}{8})$ an.