

HST, Lehrdiplom D-MATH  
**Prüfung zur Vorlesung Mathematik III**

---

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			25
2			15
3			20
Total			60

Vollständigkeit	
-----------------	--

Bitte wenden!

# Wichtige Hinweise zur Prüfung

---

**Prüfungsdauer:** 2 Stunden.

**Erlaubte Hilfsmittel:** 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

**Bitte beachten Sie folgende Punkte:**

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	falsch	
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen Sie nicht begründen.

Viel Erfolg!

**Siehe nächstes Blatt!**

# Aufgaben

---

1. (25 Punkte)

Seien  $a, b, c, d$  reelle Zahlen mit  $0 < a, b, c, d, e < 1$  und seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -a-e & 0 & 0 \\ a & -c & b \\ e & c & -b-d \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}.$$

Das lineare DGL-System  $y'(t) = A \cdot y(t)$ ,  $t \geq 0$ , beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten  $K_1, K_2, K_3$ :

$K_1$

$K_2$

$K_3$

- a) Zeichnen Sie oben die Pfeile in das Kompartimentsystem und beschriften sie diese mit  $a, b, c, d, e$ . Achten Sie dabei auf die Pfeilrichtung!

**Hinweis:** Es gibt Austausch und Abbau.

- b) In welchen der vier folgenden Fällen existiert ein nichttrivialer stationärer Zustand des Systems  $y'(t) = A \cdot y(t)$ ,  $t \geq 0$ , das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion  $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$ , welche nicht von  $t$  abhängt.

Existiert	Existiert Nicht	
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Für $0 < a, b, c, e < 1$ und $d = 0$ .
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Für $0 < b, c, d, e < 1$ und $a = 0$ .
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Für $0 < a, b, c, d < 1$ und $e = 0$ .
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Für $0 < a, b, d, e < 1$ und $c = 0$ .

- c) Seien  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{3}, d = 0$  und  $e = 0$ .

Gegeben sei eine Basis des Lösungsraumes  $\mathcal{L}_A$  des Systems  $y'(t) = A \cdot y(t)$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\left\{ t \mapsto e^{\lambda_1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-\frac{1}{3} \cdot t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t \mapsto e^{\lambda_3 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimmen Sie die Zahlen  $\lambda_1, \lambda_3$  und finden Sie geeignete Koordinaten  $x, y, z$ .

- d) Die Entwicklung mit den Zahlen aus Teil c) unterliege nun konstanten äusseren Einflüssen. Sie wird damit durch

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Einträge  $P, Q, R$  sind beliebige reelle Zahlen.

Zeigen Sie, dass es genau dann beliebig viele stationäre Zustände dieser Entwicklung gibt, wenn  $P + Q + R = 0$  gilt.

**Bitte wenden!**

2. (15 Punkte)

Die Funktion  $f$  sei gegeben durch

$$f(x) = px^2 + qx + r \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1$$

mit  $p, q$  und  $r$  reelle Koeffizienten. Weiterhin sei

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

die Fourier-Reihe zur Funktion, die aus  $f$  durch 2-periodische Fortsetzung entsteht.

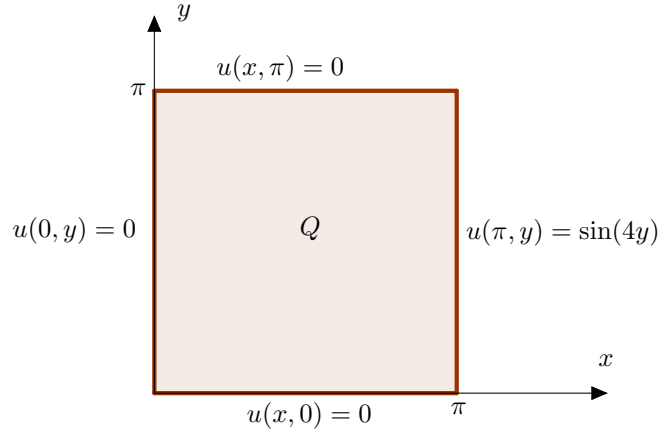
- a) • Bestimmen Sie die Koeffizienten  $p, q$  und  $r$  so, dass  $f$  nicht konstant ist und alle  $a_n$  gleich Null sind.  
• Bestimmen Sie die Koeffizienten  $p, q$  und  $r$  so, dass  $f$  nicht konstant ist und alle  $b_n$  gleich Null sind.
- b) Wählen Sie  $p = 2, q = 0$  und  $r = 1$ . Bestimmen Sie damit die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ .
- c) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten mit Hilfe des Aufgabenteils b) und geben Sie damit die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe an.

**Siehe nächstes Blatt!**

3. (20 Punkte)

Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung  $u(x, y)$  auf dem Quadrat  $Q$  mit Ecken  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \pi)$  (siehe Figur). Drei Seiten von  $Q$  werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte  $u(\pi, y) = \sin(4y)$  (siehe Figur). Die gesuchte Funktion  $u$  erfüllt also

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 && \text{auf } Q \\ u(0, y) &= 0 && \text{für } 0 < y < \pi \\ u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi \\ u(x, \pi) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi \\ u(\pi, y) &= \sin(4y) && \text{für } 0 < y < \pi \end{aligned}$$



- Machen Sie einen Separationsansatz  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen  $X$  und  $Y$ .  
**Hinweis:** Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für  $Y$  periodische Lösungen auftreten.
- Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für  $Y$  unter Beachtung der Randbedingungen  $Y(0) = Y(\pi) = 0$ .
- Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für  $X$  unter Beachtung der Randbedingung  $X(0) = 0$ .
- Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion  $u(x, y)$ .
- In welchen Punkten von  $Q$  nimmt die Lösung ihr Maximum an? (Begründung!)