D-HEST | Mathematik III | HS 2018

Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

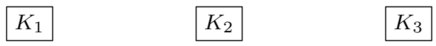
Prüfung Februar 2019
Lösung

1. Kompartimentmodell [15 Punkte]

Seien a, b, c, p, q, r reelle Zahlen mit $a, b, c, p, q, r > 0$ und seien

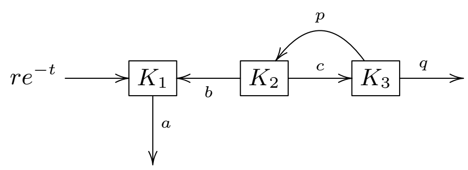
$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} re^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -b-c & p \\ 0 & c & -p-q \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}.$$

Das lineare inhomogene DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t),\ t \in \mathbb{R}$, beschreibe die Entwicklung der Menge einer Substanz in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3:



(a) Zeichnen Sie in das obige Kompartimentmodell beschriftete Pfeile ein (Richtung beachten!), sodass dadurch das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ beschrieben wird. [2 Punkte]

Lösung:



Für den Rest der Aufgabe seien $a = b = c = p = q = 1$ und $r = 4$.

(b) (i) Sei $J = \begin{pmatrix} j_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Jordansche Normalform der Matrix A.

Bestimmen Sie den Eintrag j_{11}, sowie für $t \in \mathbb{R}$ die Einträge U und V im Matrix-Exponential $e^{tJ} = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & V \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

(ii) Es gilt $A = TJT^{-1}$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Sei $e^{tA} = \begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ mit $b_1(t) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Eintrag X.

(iii) Sei $\mathcal{L}_A$ der Lösungsraum des *homogenen* Systems $y_H'(t) = Ay_H(t)$. Weisen Sie zunächst nach, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie damit einen Vektor $\widetilde{b_1} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit $\widetilde{b_1} : t \mapsto \widetilde{b_1}(t)$, sodass b_1 (aus Teil (ii)) und $\widetilde{b_1}$ einen zweidimensionalen Unterraum von $\mathcal{L}_A$ erzeugen.

[9 Punkte]

Bitte wenden!

Lösung:

(i) Auf der Diagonalen der Jordanschen Normalform von A stehen die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom von A berechnet sich zu:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)[(\lambda+2)^2-1] = (\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+3) = (\lambda+1)^2(\lambda+3).$$

[1 Punkt]
Daraus ergibt sich unmittelbar: $j_{11} = -3$.
[1 Punkt]
Mit der Formel für das Exponential von Matrizen in Block-Diagonalform und Jordanblöcken erkennt man unmittelbar:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

also $U = e^{-3t}$ und $V = te^{-t}$.
[1 Punkt]

(ii) Es gilt $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$.
[1 Punkt]
Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Te^{tJ}T^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{-t} & -e^{-3t}+e^{-t}+2te^{-t} & e^{-3t}-e^{-t}+2te^{-t} \\ 0 & 2e^{-3t}+2e^{-t} & -2e^{-3t}+2e^{-t} \\ 0 & -2e^{-3t}+2e^{-t} & 2e^{-3t}+2e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $X = e^{-t}$ gilt.
Bemerkung: Es muss nur die erste Spalte gefunden werden.
[2 Punkte]

(iii) Man berechnet:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zu Eigenwert -3.
[1 Punkt]

Laut Vorlesung ist damit $\widetilde{b}_1$ mit $\widetilde{b}_1(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen DGL-Systems $y_H'(t) = Ay_H(t)$, das heisst $\widetilde{b}_1 \in \mathcal{L}_A$.
[1 Punkt]

Man sieht leicht, dass b_1 und $\widetilde{b}_1$ linear unabhängig sind (denn die Vektoren $b_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\widetilde{b}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind schon linear unabhängig), also spannen b_1 und $\widetilde{b}_1$ in der Tat einen 2-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{L}_A$ auf.
[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

(c) (i) Sei $Z(u) = \begin{pmatrix} 4e^{-u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie für $t, u \in \mathbb{R}$ das Matrix-Vektor-Produkt $e^{(t-u)A} \cdot Z(u)$.

(ii) Die Funktion $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $y_p(t) = \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot Z(u) du = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und komponentenweiser Integration liefert eine spezielle Lösung des *inhomogenen* DGL-Systems $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ ('Variation der Konstanten'). Bestimmen Sie den Eintrag F.

[4 Punkte]

Lösung:

(i) Mit der Matrix aus (b) (iii) ergibt sich:

$$e^{(t-u)A} \cdot Z(u) = \begin{pmatrix} e^{-(t-u)} & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4e^{-u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[2 Punkte]
Bemerkung: Für diese Rechnung spielt nur $b_1(t)$ bzw. der Eintrag X eine Rolle!

(ii) Es gilt:

$$y_p(t) = \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot Z(u) du = \int_0^t \begin{pmatrix} 4e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} du = \left[\begin{pmatrix} 4ue^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_0^t = \begin{pmatrix} 4te^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das bedeutet $F = 4te^{-t}$.
[2 Punkte]

Bitte wenden!

2. Nichtlineares Differentialgleichungssystem [5 Punkte]

Wir betrachten für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ das nichtlineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = F(x(t))$:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_2(t)e^{x_1(t)} + e \cdot x_2(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 = F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Fixpunkte (stationäre Lösungen) des Systems. [2 Punkte]

Lösung:

Für die Fixpunkte muss gelten $F(x_\infty) = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= x_{\infty,2}(e - e^{x_{\infty,1}}) \\ 0 &= x_{\infty,1} - x_{\infty,2}^3 \end{aligned}$$

[1 Punkt].

Aus der ersten Gleichung erhalten wir unmittelbar: $x_{\infty,2} = 0$ (Fall I) oder $e - e^{x_{\infty,1}} = 0 \Rightarrow x_{\infty,1} = 1$ (Fall II). Einsetzen von Fall I in die zweite Gleichung liefert $x_{\infty,1} = 0$, wohingegen Einsetzen von Fall II in die zweite Gleichung auf $x_{\infty,2} = 1$ führt. Somit erhalten wir:

$$x_\infty^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_\infty^{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt]

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$. [1 Punkt]

Lösung:

Die Jacobi-Matrix lautet:

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -x_2 e^{x_1} & -e^{x_1} + e \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt]

(c) Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$.

Sei weiter $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve, welche für $t = 0$ in der Nähe von x_∞ startet.

Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve für wachsendes t.

Hinweis: Das bedeutet: Untersuchen Sie die *Stabilität* des Fixpunktes x_∞. [2 Punkte]

Lösung: Der Fixpunkt $x_\infty = x_\infty^{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der gesuchte Fixpunkt. Wir setzen ein:

$$DF(x_\infty) = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt]

Die Eigenwerte liest man unmittelbar als $\lambda_1 = -e$ und $\lambda_2 = -3$ ab und da beide negativ sind, ist (nach Hartmann-Grobmann) x_∞ ein **stabiler Fixpunkt**. Das bedeutet: Für grosse Zeiten t wird sich $f(t)$ in Richtung des Fixpunktes x_∞ hin bewegen.

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

3. Fourier-Reihen [15 Punkte]

Die Funktion f, gegeben auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^x, & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

werde 2-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

(a) (i) Berechnen Sie den komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Funktion f.
(ii) Ermitteln Sie zudem die reellen Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ der Funktion f.

[7 Punkte]

Lösung:

(i) Die allgemeine Formel zur Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten einer P-periodischen Funktion f lautet

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi n i x}{P}\right) dx.$$

[1 Punkt]
Wir setzen also $P = 2$ ein und berechnen:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-|x|} e^{-\pi n i x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} e^{(1-in\pi)x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} e^{-(1+in\pi)x} dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{1}{2(1-in\pi)} \left[e^{(1-in\pi)x}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{2(1+in\pi)} \left[e^{-(1+in\pi)x}\right]_{0}^{1} \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{1}{2(1-in\pi)} (1 - e^{-1}(-1)^n) - \frac{1}{2(1+in\pi)} (e^{-1}(-1)^n - 1) \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{(1 - \frac{(-1)^n}{e})(1 + in\pi + 1 - in\pi)}{2(1+n^2\pi^2)} \\
&= \frac{1 - \frac{(-1)^n}{e}}{1+n^2\pi^2}. \qquad \textit{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

(ii) Aus der Vorlesung sind die Formeln

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n}, \qquad n \geq 0 \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}), \qquad n \geq 1
\end{aligned}$$

bekannt. Es ist:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2 - \frac{2(-1)^n}{e}}{1+n^2\pi^2} \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
b_n &= 0 \qquad \textit{[1 Punkt]}.
\end{aligned}$$

Dass die b_n verschwinden ist auch daraus ersichtlich, dass f eine gerade Funktion ist.

(b) Betrachten Sie nun den euklidischen Vektorraum $C^0([-1, 1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$$

und den endlichdimensionalen Untervektorraum

$$U = \langle\{C_1, C_2, k\}\rangle \subseteq C^0([-1, 1]),$$

wobei $C_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n = 1, 2$ und $k(x) = x^3$.

(i) Begründen Sie, warum k orthogonal zu C_1 und C_2 ist.

Bitte wenden!

(ii) Die Vektoren C_1 und C_2 sind orthonormal. Zusammen mit einem Vektor $\widetilde{k}$ bilden diese eine Orthonormalbasis von U. Bestimmen Sie $\widetilde{k}$.

(iii) Die orthogonale Projektion $P_U(f)$ der zu Beginn der Aufgabe definierten Funktion f ist ein Vektor in U und damit eine Linearkombination

$$P_U(f) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_{\widetilde{k}} \widetilde{k}.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten α_1, α_2 und $\alpha_{\widetilde{k}}$.

[8 Punkte]

Lösung:

(i) Die Funktionen C_n, $n = 1, 2$ sind gerade, aber k ist ungerade, also ist $k \cdot C_n$ ungerade und

$$\langle C_n, k \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} C_n(x) k(x) dx = 0.$$

[2 Punkte]

(ii) Die Funktionen C_1, C_2 und k paarweise orthogonal und (da $\neq 0$) auch linear unabhängig. Ausserdem sind C_1 und C_2 bereits normiert, also $\|C_1\|_{L^2} = \|C_2\|_{L^2} = 1$. Wir erhalten eine Orthonormalbasis von U, wenn wir k noch normieren:

$$\widetilde{k}(x) = \frac{k(x)}{\|k\|_{L^2}} = \frac{x^3}{\left(\int_{-1}^{1} x^6 dx\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} x^3.$$

[2 Punkte]

(iii) Da $\{C_1, C_2, \widetilde{k}\}$ eine Orthonormalbasis von U bildet, ist die orthogonale Projektion auf U gegeben durch:

$$P_U(f) = \langle C_1, f \rangle_{L^2} C_1 + \langle C_2, f \rangle_{L^2} C_2 + \langle \widetilde{k}, f \rangle_{L^2} \widetilde{k}.$$

[1 Punkt]
Nun ist $\alpha_{\widetilde{k}} = \langle \widetilde{k}, f \rangle_{L^2} = 0$ ($f \cdot \widetilde{k}$ ist Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion)
[1 Punkt]
und weiterhin ist:

$$\alpha_n = \langle C_n, f \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x) f(x) dx = a_n, n = 1, 2.$$

[1 Punkt]
Da dies gerade die reellen Fourier-Koeffizienten von f sind, können wir schreiben:

$$P_U(f)(x) = a_1 C_1(x) + a_2 C_2(x) = \frac{2 + 2/e}{1 + \pi^2} \cos(\pi x) + \frac{2 - 2/e}{1 + 4\pi^2} \cos(2\pi x).$$

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

4. Partielle Differentialgleichungen [15 Punkte]

Wir betrachten das folgende Dirichlet-Randwertproblem auf einem Rechteck $R = [0,4] \times [0,1]$:

(PDE)	$u_{xx} + 4u_y + 4u_{yy} = x,$	für $(x,y) \in]0,4[\times]0,1[$
$(\mathrm{RB})_1$	$u(0,y) = 0$	
$(\mathrm{RB})_2$	$u(4,y) = y$	
$(\mathrm{RB})_3$	$u(x,0) = 0$	
$(\mathrm{RB})_4$	$u(x,1) = \left(\frac{x}{4}\right)^2.$	

(a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{u}(x,y) = \frac{1}{4}xy$ (PDE) löst und die Randbedingungen $(\mathrm{RB})_1$ - $(\mathrm{RB})_3$ erfüllt. [2 Punkte]

Lösung:
Beachte, dass gilt:

$$\widetilde{u}_{xx}(x,y) + 4\widetilde{u}_y(x,y) + 4\widetilde{u}_{yy}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{4}xy}_{=0} + 4\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4}xy}_{=\frac{x}{4}} + 4\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{4}xy}_{=0} = x.$$

Also löst $\widetilde{u}$ (PDE).
[1 Punkt]
Ferner ist $\widetilde{u}(0,y) = \frac{1}{4}\cdot 0 \cdot y = 0$, $\widetilde{u}(x,0) = \frac{1}{4}x \cdot 0 = 0$ und $\widetilde{u}(4,y) = \frac{1}{4}\cdot 4 \cdot y = y$, damit sind $(\mathrm{RB})_1, (\mathrm{RB})_2$ und $(\mathrm{RB})_3$ erfüllt.
[1 Punkt]

(b) Sei u eine Lösung von (PDE), die $(\mathrm{RB})_1$ - $(\mathrm{RB})_4$ erfüllt. Betrachten Sie für so ein u nun $v(x,y) := u(x,y) - \widetilde{u}(x,y)$. Zeigen Sie, dass v eine *homogene* partielle Differentialgleichung (PDE′) löst und die Randbedingungen $(\mathrm{RB}')_1$ bis $(\mathrm{RB}')_4$ erfüllt, wobei

(PDE′)	$v_{xx} + 4v_y + 4v_{yy} = 0,$	für $(x,y) \in]0,4[\times]0,1[$
$(\mathrm{RB}')_1$	$v(0,y) = 0$	
$(\mathrm{RB}')_2$	$v(4,y) = 0$	
$(\mathrm{RB}')_3$	$v(x,0) = 0$	
$(\mathrm{RB}')_4$	$v(x,1) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x}{4}.$	

[2 Punkte]

Lösung:
Sei u eine Lösung von (PDE) mit den Randbedingungen $(\mathrm{RB})_1$ - $(\mathrm{RB})_4$, dann gilt wegen der Linearität:

$$\begin{aligned} v_{xx} + 4v_y + 4v_{yy} &= u_{xx} + 4u_y + 4u_{yy} - (\widetilde{u}_{xx} + 4\widetilde{u}_y + 4\widetilde{u}_{yy}) \\ &= x - x = 0. \qquad (\mathrm{PDE}') \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Analog sieht man:

$$\begin{aligned} v(0,y) &= u(0,y) - \widetilde{u}(0,y) = 0 - 0 = 0 \\ v(4,y) &= u(4,y) - \widetilde{u}(4,y) = y - y = 0 \\ v(x,0) &= u(x,0) - \widetilde{u}(x,0) = 0 - 0 = 0 \\ v(x,1) &= u(x,1) - \widetilde{u}(x,1) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot x \cdot 1. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Bitte wenden!

(c) Machen Sie für v den Separationsansatz $v(x, y) = X(x)Y(y)$ und finden Sie gewönliche Differentialgleichungen für X und Y. Geben Sie auch $X(0)$, $X(4)$ und $Y(0)$ an. [2 Punkte]

Lösung:
Einsetzen des Separationsansatzes in (PDE′) liefert:

$$X''(x)Y(y) + 4X(x)Y'(y) + 4X(x)Y''(y) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad -\omega^2 := \frac{X''(x)}{X(x)} = -4\frac{Y''(y)}{Y(y)} - 4\frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

mit einer Konstante $\omega > 0$, die wir so wählen, dass sich für X periodische Lösungen ergeben. Damit haben wir:

$$(\mathrm{DGL})_{\mathrm{x}} \qquad X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$$
$$(\mathrm{DGL})_{\mathrm{y}} \qquad -4Y''(y) - 4Y'(y) + \omega^2 Y(y) = 0.$$

[1 Punkt] Aus den Randbedingungen $(\mathrm{RB}')_1$ - $(\mathrm{RB}')_3$ ergeben sich die Bedingungen für X und Y: $v(0, y) = X(0)Y(y) = 0$, also $X(0) = 0$ (da Y nicht die konstante Nullfunktion sein soll), analog $X(4) = 0$, $Y(0) = 0$.
[1 Punkt]

(d) Lösen Sie die in (c) ermittelten Differentialgleichungen für X und Y unter Beachtung der Randbedingungen. [4 Punkte]

Lösung:
Die allgemeine Lösung für X lautet:

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), A, B \in \mathbb{R}.$$

[1 Punkt]
Wegen $X(0) = 0$ ergibt sich sofort $A = 0$.
[1/2 Punkt]
Weiterhin liefert die Forderung $X(4) = 0$ die Bedingung $\sin(4\omega) = 0$, also $\omega = \frac{n\pi}{4}$, $n \geq 1$.
[1/2 Punkt]
Somit können wir schreiben:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right), B_n \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung für Y finden wir durch den Ansatz $Y \sim e^{\lambda y}$, der eingesetzt in $(\mathrm{DGL})_{\mathrm{y}}$ ergibt:

$$(-4\lambda^2 - 4\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\omega_n^2}{4}},$$

also erhalten wir die Lösungen

$$Y_n(y) = C_n e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y} + D_n e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}.$$

[1 Punkt]
Die Bedingung $Y(0) = 0$ führt auf $C_n = -D_n$, also zusammenfassend:

$$Y_n(y) = C_n(e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}).$$

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

(e) Finden Sie die Lösung von (PDE′) aus (b) mit den Randbedingungen $(\text{RB}')_1$ - $(\text{RB}')_4$ durch einen Superpositionsansatz. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) an, die $(\text{RB})_1$ - $(\text{RB})_4$ erfüllt. [5 Punkte]

Hinweis: Folgende Integrale können nützlich sein: $(a > 0)$

$$\int x^2 \sin(ax)dx = \frac{(2-a^2x^2)\cos(ax) + 2ax\sin(ax)}{a^3} + c, c \in \mathbb{R},$$
$$\int x \sin(ax)dx = \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Lösung:
Wir machen den Superpositionsansatz

$$v(x,y) = \sum_{n\geq 1} F_n(e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}) \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

Dieser erfüllt automatisch (PDE′) und $(\text{RB}')_1$ - $(\text{RB}')_3$. Wir fordern:

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{F_n(e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)})}_{=:b_n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right) = v(x,1) \overset{!}{=} \left(\tfrac{x}{4}\right)^2 - \tfrac{x}{4}.$$

[1 Punkt]
Auf der linken Seite erkennen wir in den b_n die Fourier-Koeffizienten einer *ungeraden* und 8-*periodischen* Funktion, die auf $[0,4]$ die Form $x \mapsto \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x}{4}$ hat. Also rechnen wir:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{8}\int_0^4 \left(\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \quad \textit{[1 Punkt]} \qquad \text{Subst.: } z = \tfrac{x}{4} \\
&= 2\int_0^1 (z^2 - z)\sin(n\pi z)dz \\
&= 2\left[\frac{(2-n^2\pi^2z^2)\cos(n\pi z) + 2n\pi z\sin(n\pi z)}{n^3\pi^3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{\sin(n\pi z) - n\pi z\cos(n\pi z)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{4}{n^3\pi^3} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade,} \\ -\frac{8}{n^3\pi^3}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

[2 Punkt]
Damit ergeben sich die F_n und wir erhalten:

$$v(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}}{e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}x\right).$$

[1/2 Punkt]
Schliesslich erinnern wir uns, dass $v = u - \widetilde{u}$ gilt und bekommen für u die Lösung:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}xy - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^3\pi^3} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}}{e^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}x\right).$$

[1/2 Punkt]