Dr. A. Caspar
Prof. N. Hungerbühler

ETH Zürich, Februar 2019

D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			15
2			5
3			15
4			15
Total			50

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- **Am Ende der Prüfung:**
  1. Ordnen Sie die Blätter, auf denen Sie die Aufgaben bearbeitet haben.
  2. Stecken Sie diese Blätter mit Ihrer Prüfung an oberster Stelle in den bereitliegenden Umschlag. Dieser soll **nicht** verschlossen werden.

$\boxed{\text{Viel Erfolg!}}$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

1. Kompartimentmodell [15 Punkte]

Seien a, b, c, p, q, r reelle Zahlen mit $a, b, c, p, q, r > 0$ und seien

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} re^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ 0 & -b-c & p \\ 0 & c & -p-q \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}.$$

Das lineare inhomogene DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t),\ t \in \mathbb{R}$, beschreibe die Entwicklung der Menge einer Substanz in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3:

$$\boxed{K_1} \qquad\qquad \boxed{K_2} \qquad\qquad \boxed{K_3}$$

(a) Zeichnen Sie in das obige Kompartimentmodell beschriftete Pfeile ein (Richtung beachten!), sodass dadurch das DGL-System $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ beschrieben wird. [2 Punkte]

Für den Rest der Aufgabe seien $a = b = c = p = q = 1$ und $r = 4$.

(b) (i) Sei $J = \begin{pmatrix} j_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Jordansche Normalform der Matrix A.

Bestimmen Sie den Eintrag j_{11}, sowie für $t \in \mathbb{R}$ die Einträge U und V im Matrix-Exponential $e^{tJ} = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & V \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

(ii) Es gilt $A = TJT^{-1}$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Sei $e^{tA} = \begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ mit $b_1(t) = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Eintrag X.

(iii) Sei $\mathcal{L}_A$ der Lösungsraum des *homogenen* Systems $y_H'(t) = Ay_H(t)$.

Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie damit einen Vektor $\widetilde{b}_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit $\widetilde{b}_1 : t \mapsto \widetilde{b}_1(t)$, sodass b_1 (aus Teil (ii)) und $\widetilde{b}_1$ einen zweidimensionalen Unterraum von $\mathcal{L}_A$ erzeugen.

[9 Punkte]

(c) (i) Sei $Z(u) = \begin{pmatrix} 4e^{-u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie für $t, u \in \mathbb{R}$ das Matrix-Vektor-Produkt $e^{(t-u)A} \cdot Z(u)$.

(ii) Die Funktion $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $y_p(t) = \int_0^t e^{(t-u)A} \cdot Z(u)du = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und komponentenweiser Integration liefert eine spezielle Lösung des *inhomogenen* DGL-Systems $y'(t) = Ay(t) + Z(t)$ ('Variation der Konstanten'). Bestimmen Sie den Eintrag F.

[4 Punkte]

Bitte wenden!

2. Nichtlineares Differentialgleichungssystem [5 Punkte]

Wir betrachten für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ das nichtlineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = F(x(t))$:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_2(t)e^{x_1(t)} + e \cdot x_2(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t)^3 = F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Fixpunkte (stationäre Lösungen) des Systems. [2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$. [1 Punkt]

(c) Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$.
Sei weiter $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve, welche für $t = 0$ in der Nähe von x_∞ startet. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve für wachsendes t.
Hinweis: Das bedeutet: Untersuchen Sie die *Stabilität* des Fixpunktes x_∞. [2 Punkte]

3. Fourier-Reihen [15 Punkte]

Die Funktion f, gegeben auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^x, & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ e^{-x}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

werde 2-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

(a) (i) Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ der Funktion f.
(ii) Ermitteln Sie zudem die reellen Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ der Funktion f.

[7 Punkte]

(b) Betrachten Sie nun den euklidischen Vektorraum $C^0([-1, 1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$$

und den endlichdimensionalen Untervektorraum

$$U = \langle \{C_1, C_2, k\} \rangle \subseteq C^0([-1, 1]),$$

wobei $C_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n = 1, 2$ und $k(x) = x^3$.

(i) Begründen Sie, warum k orthogonal zu C_1 und C_2 ist.

(ii) Die Vektoren C_1 und C_2 sind orthonormal. Zusammen mit einem Vektor $\widetilde{k}$ bilden diese eine Orthonormalbasis von U. Bestimmen Sie $\widetilde{k}$.

(iii) Die orthogonale Projektion $P_U(f)$ der zu Beginn der Aufgabe definierten Funktion f ist ein Vektor in U und damit eine Linearkombination

$$P_U(f) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_{\widetilde{k}} \widetilde{k}.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten α_1, α_2 und $\alpha_{\widetilde{k}}$.

[8 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

4. Partielle Differentialgleichungen [15 Punkte]

Wir betrachten das folgende Randwertproblem auf einem Rechteck $R = [0,4] \times [0,1]$:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PDE)} & u_{xx} + 4u_y + 4u_{yy} = x, & \text{für } (x,y) \in \,]0,4[\, \times \,]0,1[\\
\text{(RB)}_1 & u(0,y) = 0 & \\
\text{(RB)}_2 & u(4,y) = y & \\
\text{(RB)}_3 & u(x,0) = 0 & \\
\text{(RB)}_4 & u(x,1) = \left(\frac{x}{4}\right)^2. &
\end{array}
$$

(a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{u}(x,y) = \frac{1}{4}xy$ (PDE) löst und die Randbedingungen (RB)_1, (RB)_2 und (RB)_3 erfüllt. [2 Punkte]

(b) Sei u eine Lösung von (PDE), die (RB)_1 - (RB)_4 erfüllt. Betrachten Sie für so ein u nun $v(x,y) := u(x,y) - \widetilde{u}(x,y)$. Zeigen Sie, dass v eine *homogene* partielle Differentialgleichung (PDE′) löst und die Randbedingungen $\text{(RB}')_1$ bis $\text{(RB}')_4$ erfüllt, wobei

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PDE}') & v_{xx} + 4v_y + 4v_{yy} = 0, & \text{für } (x,y) \in \,]0,4[\, \times \,]0,1[\\
\text{(RB}')_1 & v(0,y) = 0 & \\
\text{(RB}')_2 & v(4,y) = 0 & \\
\text{(RB}')_3 & v(x,0) = 0 & \\
\text{(RB}')_4 & v(x,1) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{x}{4}. &
\end{array}
$$

[2 Punkte]

(c) Machen Sie für v den Separationsansatz $v(x,y) = X(x)Y(y)$ und finden Sie gewönliche Differentialgleichungen für X und Y. Geben Sie auch $X(0)$, $X(4)$ und $Y(0)$ an. [2 Punkte]

(d) Lösen Sie die in (c) ermittelten Differentialgleichungen für X und Y unter Beachtung der Randbedingungen. [4 Punkte]

(e) Finden Sie die Lösung von (PDE′) aus (b) mit den Randbedingungen $\text{(RB}')_1$ - $\text{(RB}')_4$ durch einen Superpositionsansatz. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) an, die (RB)_1 - (RB)_4 erfüllt. [5 Punkte]

Hinweis: Folgende Integrale können nützlich sein: $(a > 0)$

$$
\int x^2 \sin(ax)dx = \frac{(2 - a^2x^2)\cos(ax) + 2ax\sin(ax)}{a^3} + c, c \in \mathbb{R},
$$
$$
\int x \sin(ax)dx = \frac{\sin(ax) - ax\cos(ax)}{a^2} + c, c \in \mathbb{R}.
$$