Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. (a) [**4 Punkte**]

Sei B eine 2×2 - Matrix mit Jordanscher Normalenform $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

i. Begründen Sie, warum $a = -1$ sein muss.
Lösung:

Auf der Diagonalen von J stehen die EW von B, damit ist a ein EW. Angenommen, $a \neq -1$. Dann hat B zwei unterschiedliche EW, damit sind B diagonalisierbar und J eine Diagonalmatrix.
Alternative: Die Matrix J besteht nur aus einem Jordanblock der Länge 2. Dieser hat auf der Diagonalen den gleichen Eintrag. Daher muss $a = -1$ gelten.

ii. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ das Matrix-Exponential e^{tJ}.
Lösung:

Mit der Formel für das Matrix-Exponential eines Jordan Blocks (Skript 3.6.3) gilt

$$e^{tJ} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

(b) [**5 Punkte**]

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Seien J wie in Teil (a) und $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist die Gleichung $AT = TJ$ erfüllt.
Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ des Systems $y' = Ay$.
Lösung:

Lösungsvariante 1:
Die Spalten von e^{tA} bilden eine Basis von $\mathcal{L}_A$. Nach Angabe gilt $A = TJT^{-1}$ (mit T invertierbar), also $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ (Skript 3.6.2).
Es ist $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und dann mithilfe der vorigen Teilaufgabe

$$\begin{aligned} e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & -1-t \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher ist eine mögliche Basis von $\mathcal{L}_A$ gegeben durch $\left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \right\}$.

Lösungsvariante 2:

Die allgemeine Lösung des Systems ist gegeben durch $y(t) = e^{tA}C$, wobei $C \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor mit Konstanten ist. Da T invertierbar ist, können wir $\tilde{C} = T^{-1}C$ als neuen Konstantenvektor definieren und haben somit die allgemeine Lösung $y(t) = Te^{tJ}\tilde{C}$. Dementsprechend bilden die Spalten von Te^{tJ} eine Basis von $\mathcal{L}_A$. Mithilfe der vorigen Teilaufgabe gilt

$$Te^{tJ} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 & -1-t \\ 1 & t \end{pmatrix},$$

daher ist eine mögliche Basis von $\mathcal{L}_A$ gegeben durch $\left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-t}\begin{pmatrix} -1-t \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

Bemerkung: Die Basen der Lösungsvarianten können ineinander überführt werden.

(c) [**3 Punkte**]

Seien $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y' = Ay + g$ ein inhomogenes System. Bestimmen Sie die stationären Zustände y_∞.

Lösung:

Ein stationärer Zustand y_∞ erfüllt $0 = y'_\infty = Ay_\infty + g$. Mit A invertierbar ist $y_\infty = -A^{-1}g$. Hier ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist $-A^{-1}g = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ der einzige stationäre Zustand des inhomogenen Systems.

2. (a) **[7 Punkte]**

Sei $g : [-1,1[\to \mathbb{R}$, mit $g(x) = x$. Diese setzen wir mit Periode 2 zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ periodischen Funktion f fort. Bestimmen Sie für f

i. die reellen Fourier-Koeffizienten a_n und b_n.

ii. die komplexen Fourier-Koeffizienten c_n.

Hinweis: Sie können auch erst Teil ii. bearbeiten.

Lösung:

Lösungsvariante 1:

Wir bemerken zunächst, dass f eine ungerade Funktion ist. Daher (z.B. mit Serie 7) gilt für alle Koeffizienten $a_n = 0$. Die Koeffizienten b_n berechnen wir mit der Formel für allgemeine Periode $T = 2$ (Skript 4.5.2) und mit partieller Integration

$$\begin{aligned} b_n &\overset{*}{=} 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = 2\left[\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_{x=0}^1 - 2\int_0^1 -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx \\ &= \frac{-2\cos(n\pi)}{n\pi} + 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_{x=0}^1 = \frac{-2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

Mit $*$: Es ist $f\cdot\sin$ gerade, siehe z.B. wieder Serie 7.

Die Umformung von den reellen zu den komplexen Fourier-Koeffizienten (Skript 4.5.3) liefert für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{-i2(-1)^{n+1}}{n\pi}, & \text{für } n > 0, \\ 0, & \text{für } n = 0, \\ \frac{i2(-1)^{(-n)+1}}{(-n)\pi}, & \text{für } n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{i(-1)^n}{n\pi}, & \text{für } n \neq 0, \\ 0, & \text{für } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2:

Wir berechnen direkt die komplexen Fourier-Koeffizienten. Wir bemerken, dass f eine ungerade Funktion ist, daher also $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Somit folgt aus der Umformung von komplexen zu reellen Fourier-Koeffizienten, dass

$$\begin{aligned} 0 = a_n = c_n + c_{-n} \quad &\Longleftrightarrow \quad c_{-n} = -c_n \\ 0 = a_0 = 2c_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_0 = 0 \end{aligned}$$

Es genügt also für $n \geq 1$ die komplexen Koeffizienten c_n mit der Formel für allgemeine

Periode $T = 2$ zu berechnen. Wir benutzen partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xe^{-n\pi ix}dx = \frac{1}{2}\left[x\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}\right]_{x=-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-n\pi ix}}{-n\pi i}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-n\pi i}+e^{n\pi i}}{-n\pi i}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-n\pi ix}}{(-n\pi i)^2}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{i\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-n\pi i}-e^{n\pi i}}{(-n\pi i)^2}\right) \\
&= \frac{i(-1)^n}{n\pi} + \left(\frac{i\sin(n\pi)}{-(n\pi)^2}\right) = \frac{i(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Schlussendlich können wir $c_{-n} = -c_n$ verwenden um für $n \geq 1$, b_n zu berechnen

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2ic_n = \frac{2i^2(-1)^n}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Lösungsvariante 3:
Wir berechnen für $n \neq 0$, $c_n = \frac{i(-1)^n}{n\pi}$ wie in LV2. Für $n = 0$ bemerken wir, dass aufgrund von Symmetrie gilt $c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = 0$. Nun setzen wir in die Formeln für die Umformung zu reellen Fourier-Koeffizienten ein und erhalten für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = 0, \\
a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{i(-1)^n}{n\pi} + \frac{i(-1)^{-n}}{-n\pi} = 0, \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = i(\frac{i(-1)^n}{n\pi} - \frac{i(-1)^{-n}}{-n\pi}) = \frac{2i^2(-1)^n}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

(b) [**8 Punkte**]
Sei $\mathcal{P}_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 auf $[-1, 1]$. Für $p, q \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ ist das Skalarprodukt $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.
Seien p, q gegeben durch $p(x) = x^2 + x + 1$ und $q(x) = ax + 1$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

i. Bestimmen Sie $a < 0$ so, dass q die Länge $\sqrt{8}$ hat.
Lösung:

Falls allgemeiner q die Länge $\sqrt{\ell}$ haben soll, so muss gelten $\langle q, q\rangle = \|q\|^2 = \ell$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle q, q\rangle &= \int_{-1}^{1} q(x)^2 dx = \int_{-1}^{1}(a^2x^2 + 2ax + 1)dx = \left[\frac{a^2x^3}{3} + \frac{2ax^2}{2} + x\right]_{x=-1}^{1} \\
&= \left(\frac{a^2}{3} + \frac{2a}{2} + 1\right) - \left(\frac{-a^2}{3} + \frac{2a}{2} - 1\right) = \frac{2a^2}{3} + 2.
\end{aligned}$$

Also muss gelten

$$\frac{2a^2}{3} + 2 = \ell \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3(\ell-2)}{2}}$$

Einsetzen von $\ell = 8$ ergibt somit $a = \pm 3$.

ii. Bestimmen Sie a so, dass p und q orthogonal sind.
Lösung:

Es gilt, dass p und q orthogonal sind, falls $\langle p, q\rangle = 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle p, q\rangle &= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1)(ax + 1)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (ax^3 + (1+a)x^2 + (1+a)x + 1)dx \\
&= \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{(1+a)x^3}{3} + \frac{(1+a)x^2}{2} + x\right]_{x=-1}^{1} \\
&= \frac{2(1+a)}{3} + 2.
\end{aligned}$$

Daher muss gelten

$$\frac{2(1+a)}{3} + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

3. Wir betrachten für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ein nichtlineares System $x'(t) = F(x(t))$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t)) = 2^{x_1(t)} x_2(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t) - x_2(t)^2. \end{aligned}$$

(a) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Fixpunkte (stationäre Lösungen) des Systems.
Lösung:

Eine stationäre Lösung erfüllt $x'(t) = F(x(t)) = 0$. Falls $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$, so folgt aus der 2. Gleichung $x_2' = 0$, dass auch die andere Koordinate 0 ist. Daher ist der erste Fixpunkt

$$x_\infty^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir nun an, dass $x_1 \neq 0 \neq x_2$. Dann folgt aus der 1. Gleichung $x_1' = 0$, dass $x_1 = 1$. Aus der 2. Gleichung $x_2' = 0$ folgt, dass $x_2 = \pm\sqrt{x_1}$, also erhalten wir 2 weitere Fixpunkte

$$x_\infty^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_\infty^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.
Hinweis: Es ist $2^x = e^{\ln(2)x}$.
Lösung:

Ausrechnen der jeweiligen Matrix-Einträge ergibt dann

$$DF(x) = \begin{pmatrix} x_2 \ln(2) 2^{x_1} & 2^{x_1} - 2 \\ 1 & -2x_2 \end{pmatrix}.$$

(c) [**3 Punkte**]
Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$. Untersuchen Sie das Verhalten einer Lösung in der Nähe des Fixpunktes x_∞.
Lösung:

Nur $x_\infty^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat positive Koordinaten.

Einsetzen ergibt $DF(x_\infty^2) = \begin{pmatrix} 2\ln(2) & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Da die EW auf der Diagonalen Realteil verschieden von 0 haben, können wir den Satz von Hartman-Grobman anwenden.

Wir untersuchen das Verhalten der linearisierten Lösung: Da ein EW von $DF(x^2_\infty)$ positiv ist und der andere negativ, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

4. Wir modellieren die zeitliche Entwicklung einer Entzündung in einem Organ durch die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + \lambda u. \tag{PDE}$$

Dabei ist $u(x,t)$ der Grad der Entzündung zur Zeit t an der Stelle $x \in [0,\pi]$ und $\lambda > 0$ ein Mass für die Reproduktionsrate der Erreger. Am Rand des Organs sei die Entzündung für $t > 0$ durch den Einfluss eines Antiphlogistikums unter Kontrolle, das heisst es gilt

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0. \tag{RB}$$

Zur Zeit $t = 0$ hat die Entzündung das Organ gleichmässig erfasst:

$$u(x,0) = 1 \quad \text{für } 0 < x < \pi. \tag{AB}$$

(a) [**3 Punkte**]
Führen Sie einen Separationsansatz $u(x,t) = T(t)X(x)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für $X(x)$ und für $T(t)$ zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für X periodische Lösungen entstehen.
Lösung:

Mit dem gegebenen Separationsansatz erhalten wir die (PDE)

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + \lambda T(t)X(x),$$

welche wir durch $T(t)X(x)$ dividieren um auf

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \lambda$$

zu kommen, welche nun in separierter Form ist. Mit den üblichen Argumenten gilt nun, dass beide Seiten konstant sein müssen. Wir wählen die Konstante $c := -\omega^2 + \lambda$, für $\omega > 0$ (damit X periodische Lösungen hat, muss die Konstante für X negativ sein) und erhalten damit die beiden DGLs

$$T'(t) = cT(t),$$
$$X''(x) = -\omega^2 X(x).$$

(b) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Lösungen $X_n(x)$, welche den Randbedingungen (RB) gehorchen.
Lösung:

Die allgemeine Lösung für X ist

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Aus $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ folgt $0 = X(0) = A$. Und aus $0 = u(\pi,t) = X(\pi)T(t)$ folgt $0 = X(\pi) = B\sin(\omega\pi)$, was erfüllt ist, wenn

$$\omega = n \in \mathbb{N}.$$

Daher erhalten wir die Lösungen

$$X_n(x) = B_n \sin(nx).$$

Da wir nach Basislösungen suchen, kann hier $B_n = 1$ gewählt werden.

(c) [**2 Punkte**]
Finden Sie für jede Lösung $X_n(x)$ eine Lösung $T_n(t)$ um die Basislösungen $u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x)$ zu erhalten.
Lösung:

Für die Lösung X_n haben wir die Konstante $\omega = n$, also $c = -\omega^2 + \lambda = -n^2 + \lambda$ erhalten. Die dazu gehörende Lösung für T ist also

$$T_n(t) = \exp((\lambda - n^2)t).$$

(d) [**7 Punkte**]
Superponieren Sie die Basislösungen, also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_n(t) X_n(x),$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten B_n so, dass die Anfangsbedingung (AB) erfüllt ist. Für welche Werte von λ geht die Entzündung im Laufe der Zeit zurück?
Lösung:

Mittels Superposition der Basislösungen erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp((\lambda - n^2)t)\sin(nx).$$

Um die (AB) zu erfüllen muss gelten

$$1 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx), \quad \text{für } 0 < x < \pi.$$

Wir bestimmen die Koeffizienten B_n mit Hilfe von Fourier-Reihen und Koeffizientenvergleich. Da wir nur ungerade Terme (sin-Terme) zur Verfügung haben, setzten wir $f(x) = 1$ ungerade auf dem Interval $[-\pi, \pi)$ fort und berechnen die entsprechenden Fourier-Koeffizienten für $n \geq 1$ als

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\begin{cases} 2, & \text{für } n = 2k+1, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich folgt nun, dass $B_n = b_n$ gelten muss. Somit erhalten wir die Lösung für u, welche sowohl (RB) als auch (AB) erfüllt, als

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \exp\big((\lambda - (2k+1)^2)t\big) \sin((2k+1)x).$$

Damit für beliebiges $0 < x < \pi$ die Entzündung zurückgeht, also $u(x,t) \to 0$ für $t \to \infty$, müssen alle Koeffizienten der exp-Terme negativ sein. Es muss also gelten

$$\lambda - (2k+1)^2 < 0, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dies ist erfüllt, falls $0 < \lambda < 1$ gilt.