D–HEST / Lehrdiplom Mathematik

Prüfung Mathematik III

401-0293-00L

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. (a) [**4 Punkte**]

Sei B eine 2×2 - Matrix mit Jordanscher Normalenform $J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

i. Begründen Sie, warum $a = -1$ sein muss.

ii. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ das Matrix-Exponential e^{tJ}.

(b) [**5 Punkte**]

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Seien J wie in Teil (a) und $T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist die Gleichung $AT = TJ$ erfüllt.

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_A$ des Systems $y' = Ay$.

(c) [**3 Punkte**]

Seien $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y' = Ay + g$ ein inhomogenes System. Bestimmen Sie die stationären Zustände y_∞.

2. (a) [**7 Punkte**]

Sei $g : [-1, 1[\to \mathbb{R}$, mit $g(x) = x$. Diese setzen wir mit Periode 2 zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ periodischen Funktion f fort. Bestimmen Sie für f

i. die reellen Fourier-Koeffizienten a_n und b_n.

ii. die komplexen Fourier-Koeffizienten c_n.

Hinweis: Sie können auch erst Teil ii. bearbeiten.

(b) [**8 Punkte**]

Sei $\mathcal{P}_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 auf $[-1, 1]$. Für $p, q \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ ist das Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Seien p, q gegeben durch $p(x) = x^2 + x + 1$ und $q(x) = ax + 1$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

i. Bestimmen Sie $a < 0$ so, dass q die Länge $\sqrt{8}$ hat.

ii. Bestimmen Sie a so, dass p und q orthogonal sind.

3. Wir betrachten für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ein nichtlineares System $x'(t) = F(x(t))$ mit

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= F_1(x_1(t), x_2(t)) = 2^{x_1(t)} x_2(t) - 2x_2(t), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t) - x_2(t)^2. \end{aligned}$$

(a) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Fixpunkte (stationäre Lösungen) des Systems.

(b) [**2 Punkte**]
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.
Hinweis: Es ist $2^x = e^{\ln(2)x}$.

(c) [**3 Punkte**]
Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$. Untersuchen Sie das Verhalten einer Lösung in der Nähe des Fixpunktes x_∞.

4. Wir modellieren die zeitliche Entwicklung einer Entzündung in einem Organ durch die partielle Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + \lambda u. \tag{PDE}$$

Dabei ist $u(x,t)$ der Grad der Entzündung zur Zeit t an der Stelle $x \in [0,\pi]$ und $\lambda > 0$ ein Mass für die Reproduktionsrate der Erreger. Am Rand des Organs sei die Entzündung für $t > 0$ durch den Einfluss eines Antiphlogistikums unter Kontrolle, das heisst es gilt

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0. \tag{RB}$$

Zur Zeit $t = 0$ hat die Entzündung das Organ gleichmässig erfasst:

$$u(x,0) = 1 \quad \text{für } 0 < x < \pi. \tag{AB}$$

(a) [**3 Punkte**]
Führen Sie einen Separationsansatz $u(x,t) = T(t)X(x)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für $X(x)$ und für $T(t)$ zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für X periodische Lösungen entstehen.

(b) [**3 Punkte**]
Bestimmen Sie die Lösungen $X_n(x)$, welche den Randbedingungen (RB) gehorchen.

(c) [**2 Punkte**]
Finden Sie für jede Lösung $X_n(x)$ eine Lösung $T_n(t)$ um die Basislösungen $u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x)$ zu erhalten.

(d) [**7 Punkte**]
Superponieren Sie die Basislösungen, also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_n(t) X_n(x),$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten B_n so, dass die Anfangsbedingung (AB) erfüllt ist. Für welche Werte von λ geht die Entzündung im Laufe der Zeit zurück?