Aufgaben und Lösungsvorschlag Gruppe A

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Wir betrachten das DGL-System

$$x'(t) = Ax(t),\ t \geq 0, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A = PDP^{-1}$ mit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Lösung $t \mapsto x(t)$ des DGL-System, mit Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, gegeben durch

(A) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(B) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$

(C) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

Lösung:

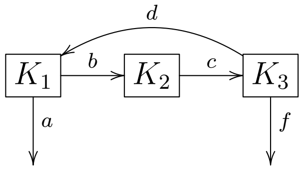
Das Matrix-Exponential ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & -e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} & e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung des DGL-System gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

1.MC2 [2 Punkte] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3 :



Die Stoffmengen einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten seien gegeben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Das Kompartimentmodell wird durch das folgende DGL-System beschrieben

$$Y'(t) = AY(t),\ t \geq 0, \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & 0 & d \\ b & -c & 0 \\ 0 & c & -(d+f) \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ b & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+d) & a \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

Lösung:

Sollte selbsterklärend sein.

1.MC3 [2 Punkte] Sei $y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = 1$

(B) $y_{\infty,2} = -1$

(C) **TRUE:** $y_{\infty,2} = \dfrac{1}{2}$

(D) $y_{\infty,2} = 0$

Lösung:

Weil y_∞ eine stationäre Lösung ist gilt

$$0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt $1 - 2y_{\infty,2} = 0$ und somit $y_{\infty,2} = \frac{1}{2}$.

1.A1 Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tA} für $t \geq 0$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Jordan-Normal-Form ist gegeben durch

$$J := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$e^{tA} = e^{tTJT^{-1}} = Te^{tJ}T^{-1},$$

und

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{5t} & e^{5t} + te^{5t} \\ -e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{5t}(1-t) & te^{5t} \\ -te^{5t} & e^{5t}(1+t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Lösung der DGL ist gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} te^{5t} \\ e^{5t}(1+t) \end{pmatrix}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' - 2x' + x = 0. \tag{DG}$$

(i) **[1 Punkt]** Sei nun $y(t) = (x(t), x'(t))^T$, wobei x eine Lösung von (DG) ist. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass gilt

$$y'(t) = Ay(t).$$

Lösung:

Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Differentiagleichung umschreiben, erhalten wir $x''(t) = 2x'(t) - x(t)$. Damit folgt

$$y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x(t) + 2x'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = Ay(t).$$

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von (DG).

Lösung:

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$.

Variante 1: Nach Satz 1.22 bilden die Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = te^t, \tag{1}$$

ein Fundamentalsystem.

Variante 2: Das Matrix Exponential ist gegeben durch

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis des Lösungsraum von $y' = Ay$. Daraus folgt, dass die erste Zeile von e^{tA} eine Basis von (DG) bildet. Also ist

$$x_1(t) = e^t(1-t), \quad x_2(t) = te^t \tag{2}$$

eine Basis. Basen sind nicht eindeutig, (5) und (6) geht beides.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^2 2^t$. Dann ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^3}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2 - \ln(2)}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{(s-\ln(2))^2}$

(D) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{(s-\ln(2))^3}$

Lösung:

Mit dem Dämfpungssatz folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}[t^2 e^{\ln(2)t}](s) \\ &= \mathcal{L}[t^2](s-\ln(2)) \\ &= \frac{2}{(s-\ln(2))^3}. \end{aligned}$$

2.MC2 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = (t-3)^2\vartheta(t-3)$, wobei

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\dfrac{2}{s^3}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-3s}$

(C) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = e^{-3s}\dfrac{2}{s^3}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{s^2}$

Lösung:

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$\mathcal{L}[(t-3)^2\vartheta(t-3)](s) = e^{-3s}\mathcal{L}[t^2\vartheta(t)](s) = e^{-3s}\frac{2}{s^3}.$$

2.MC3 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^{7/2}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\left[t^{5/2}\right](s) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}.$$

Dann ist die Laplace-Transformation von $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch

(A) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{8s^{5/2}}$

(B) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{s^{9/2}}$

Lösung:

Mit dem Satz über Integration im Originalbereich und mit dem Hinweis folgt

$$\mathcal{L}\left[t^{7/2}\right](s) = \frac{7}{2s}\mathcal{L}\left[t^{5/2}\right](s) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}.$$

2.A1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformation von $F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Lösung:

Nach dem Dämpfungssatz gilt

$$\mathcal{L}[e^{-3t}](s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \frac{1}{s+4}.$$

Variante 1: Nach dem Faltungs-Satz gilt

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-3t}](s)\mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \mathcal{L}[e^{-3t} * e^{-4t}](s).$$

Für die Faltung erhalten wir

$$(e^{-3u} * e^{-4u})(t) = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-4t}e^{\tau}d\tau = e^{-4t}(e^t - 1) = e^{-3t} - e^{-4t}.$$

Also ist die inverse Laplace-Transformation gegeben durch $e^{-3t} - e^{-4t}$.

Variante 2: Es gilt die Parialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4}.$$

Mit der Linerität der Laplace-Transformation folgt

$$F(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} = \mathcal{L}[e^{-3t}] - \mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \mathcal{L}[e^{-3t} - e^{-4t}](s).$$

Also ist die inverse Laplace-Transformation gegeben durch $e^{-3t} - e^{-4t}$.

2.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$$

unter Verwendung der Laplace-Transformation.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Lösung:

Wir definieren $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$. Mit dem Ableitungs-Satz und den Anfangsbedingungen folgt

$$\mathcal{L}[\ddot{x}](s) = s\mathcal{L}[\dot{x}](s) - \dot{x}(0) = s(s\mathcal{L}[x](s) - x(0)) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - 1 \quad \text{und}$$
$$\mathcal{L}[\dot{x}](s) = sX(s)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x](s) &= s^2X(s) - 1 + 3sX(s) + 2X(s)\\ &= X(s)(s^2 + 3s + 2) - 1\end{aligned}$$

Wenn wir die Laplace-Transformation auf beiden Seiten der Differentialgleichung anwenden und nach $X(s)$ auflösen, erhalten wir

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Wir machen den Ansatz für eine Partialbruchzerlegung. Wir suchen also $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Nach ausmultiplizieren, erhalten wir $A = 2, B = -1$ und somit

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Daraus folgern wir

$$\mathcal{L}[x](s) = X(s) = \mathcal{L}[e^{-t} - e^{-2t}](s).$$

Also ist die Lösung gegeben durch $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, wegen der Eindeutigkeit der Laplace-Transformation.

Aufgabe 3

3.MC1 [2 Punkte] Sei f die Funktion mit $f(x) = dx^2 + 1$, einer Konstante d und $x \in [-1, 1]$. Für welches d hat die 2-periodische Fortsetzung von der Funktion f den Fourier-Koeffizienten $a_0 = 4$?

(A) $d = 0$

(B) **TRUE:** $d = 3$

(C) $d = 2$

(D) $d = 1$

Lösung:

Die korrekte Antwort ist $d = 3$, da

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} (dx^2 + 1)dx = \left(d \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} + 2 \right) = \left(d\frac{2}{3} + 2 \right) \\ &= d\frac{2}{3} + 2 = 4 \iff d = 3. \end{aligned}$$

3.MC2 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\cos(x)$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Weiterhin sei $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ die Fourier-Reihe zur Funktion von f. Dann gilt

(A) $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(B) **TRUE:** $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(C) $b_1 = \pi$

(D) $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Lösung:

Weil f ungerade und $x \mapsto \cos(nx)$ gerade ist, gilt für alle $n \geq 0$, dass

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

3.MC3 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \pi$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dann kann f auf ganz $\mathbb{R}$ als Fourier-Reihe dargestellt werden. Welchen Wert nimmt die Fourier-Reihe von f an der Sprung-Stelle $x = \pi$ an?

(A) 2

(B) 1

(C) -1
(D) **TRUE:** π

Lösung:

Nach Satz 4.6 konvergiert die Funktion zum Mittel des linken und rechten Grenzwertes bei $x = \pi$, also gegen $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

3.A1 [3 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$. Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Lösung:

Weil die Funktion f gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine L-periodische Funktion ist, gilt die Formel

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die gegeben Funktion erhalten wir also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhalten wir für $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3}\pi^3\right) = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\ dx \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{n}x^2 \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} x \cos(nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)\ dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n + \underbrace{\left[\frac{1}{n^2} \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

3.A2 [3 Punkte] Sei $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-x}$ für $x \in [0, 1[$ eine Funktion, die wir 1-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourier-Reihe von g.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Lösung:

Für eine L-periodische Funktion f, ist die Formel für die komplexen Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt also hier

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 e^{-x}e^{-i2\pi nx}dx \\ &= \int_0^1 e^{-(1+i2\pi n)x}dx \\ &= \frac{-1}{1+i2\pi n}\left[e^{-(1+i2\pi n)x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+i2\pi n}\left(1-e^{-1}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

4.MC1 **[2 Punkte]** Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion, wobei $\overline{B_1(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = 3(\cos(\varphi))^2, \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dann ist das Maximum der Funktion u auf $\overline{B_1(0)}$ gegeben durch

(A) 2

(B) 0

(C) **TRUE:** 3

(D) -1

Lösung:

Wir wenden Korollar 5.11 an. Die Funktion u ist harmonisch und nicht konstant auf $\overline{B_1(0)}$. Also nimmt die Funktion ihr Maximum auf dem Rand $\partial\overline{B_1(0)}$ an. Es gilt also

$$\max_{(r,\varphi)\in\overline{B_1(0)}} u(r,\varphi) = \max_{(r,\varphi)\in\partial\overline{B_1(0)}} u(r,\varphi) = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} u(1,\varphi) = 3 \max_{\varphi\in[0,2\pi)} (\sin(\varphi))^2 = 3.$$

4.MC2 **[2 Punkte]** Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} 4 \text{ wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 \text{ wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Dann ist $u(0,0)$ gegeben durch

(A) 0

(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) **TRUE:** 2

Lösung:

Nach der Mittelwerteigenschaft (Satz 5.10), gilt

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 4 d\varphi = 2.$$

4.MC3 [2 Punkte] Für $k \in \mathbb{R}$, definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche der folgenden Gleichungen gilt für den Parameter k, wenn u die Wellengleichung erfüllt?

(A) $k = 3$

(B) $k = -2$

(C) **TRUE:** $k^2 = 1$

(D) $k^2 = 4$

Lösung:

Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &= k\cos(kx - t), \quad & u_{xx}(t, x) &= -k^2 \sin(kx - t) \\ u_t(t, x) &= -\cos(kx - t), \quad & u_{tt}(t, x) &= -\sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Funktion u ist genau dann eine Lösung von $u_{tt} = u_{xx}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ die Beziehung

$$-\sin(kx - t) = -k^2 \sin(kx - t)$$

gilt. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $1 = k^2$ ist.

4.A1 [6 Punkte] Die Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \text{ für } 0 < x < \pi \text{ und } t > 0. \tag{PDE}$$

Ausserdem, gelten die Rand und Anfangsbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{für } t \geq 0, \tag{RB}$$

$$u(0, x) = 2\sin(3x), \quad \text{für } 0 < x < \pi. \tag{AB}$$

(i) Führen Sie den Separationsansatz $u(x, t) = f(t)g(x)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für f und g zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für g periodische Funktionen gesucht werden. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen der Differentialgleichungen nicht konstant gleich Null sind. Schreiben Sie die allgemeinen Lösungen explizit auf.

Lösung:

Indem man den Ansatz $u(t,x)$ in (PDE) einsetzt, erhält man

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt, muss

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \kappa$$

gelten, für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Man hat also eine Differentialgleichung für f und eine für g. Die Lösungen für f sind gegeben durch

$$Ce^{t\kappa}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Lösungen für g sind gegeben durch

$$Ae^{x\sqrt{\kappa}},\ Be^{-x\sqrt{\kappa}}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Anfangsbedingung (AB), wissen wir dass g eine nicht konstante periodische Funktion sein muss. Und daher ist $\kappa = -\omega^2 < 0$, mit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man erhält somit die beiden Differentialgleichungen

$$f'(t) = -\omega^2 f(t), \tag{3}$$
$$g''(x) = -\omega^2 g(x). \tag{4}$$

Die Lösungen für f und g sind dann gegeben durch

$$f(t) = Ce^{-\omega^2 t},$$
$$g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungen g_n der Differentialgleichung für g, so dass die Randbedingung $g_n(0) = g_n(\pi) = 0$ gilt. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen g_n nicht konstant gleich Null sind.

Lösung:

Aus (RB) erhalten wir $u(t,0) = f(t)g(0) = Ce^{-\omega^2 t}A = 0$ und damit $A = 0$, weil $C \neq 0$. Ausserdem folgt damit $B \neq 0$, weil sonst g konstant gleich null wäre. Wiederum aus (RB), erhalten wir $u(t,\pi) = f(t)g(\pi) = Ce^{-\omega^2 t}B\sin(\omega\pi) = 0$, und damit $\omega = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die gesuchten Lösungen sind also von der Form

$$g_n(x) = B_n \sin(\omega_n x) = B_n \sin(nx), \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } B_n \in \mathbb{R}.$$

(iii) Schreiben Sie die Fundamentallösungen $u_n(t,x) = f_n(t)g_n(x)$, welche (PDE) and (RB) erfüllen, explizit auf.

Lösung:

$$u_n(t,x) = f_n(t)g_n(x) = C_n e^{-n^2 t} B_n \sin(nx) = D_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ D_n \in \mathbb{R}.$$

(iv) Finden Sie durch Superposition der Fundamentallösungen, also mit dem Ansatz

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_n(t,x),\ D_n \in \mathbb{R}$$

die Lösung von (PDE), welche die Anfangsbedingung (AB) und die Randbedingung (RB) erfüllt. Schreiben Sie die Lösung explizit hin.

Lösung:

Einsetzen von $u_n(x,t)$ ergibt

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Aus (AB) folgt

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(nx) = 2\sin(3x).$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt also $D_3 = 2$ und $D_n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$. Die Lösung ist also gegeben durch

$$u(t,x) = 2e^{-9t} \sin(3x).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

Aufgaben und Lösungsvorschlag Gruppe B

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Wir betrachten das DGL-System

$$x'(t) = Ax(t),\ t \geq 0, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A = PDP^{-1}$ mit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Lösung $t \mapsto x(t)$ des DGL-System, mit Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, gegeben durch

(A) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$

(B) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(C) **TRUE:** $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

(D) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

Lösung:

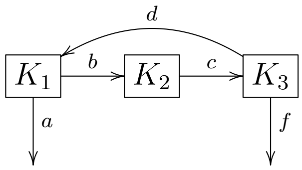
Das Matrix-Exponential ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & -e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} & e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung des DGL-System gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-3t} + e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

1.MC2 [2 Punkte] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3 :



Die Stoffmengen einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten seien gegeben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Das Kompartimentmodell wird durch das folgende DGL-System beschrieben

$$Y'(t) = AY(t),\ t \geq 0, \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{3\times3}.$$

Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+d) & a \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ b & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -(a+b) & 0 & d \\ b & -c & 0 \\ 0 & c & -(d+f) \end{pmatrix}$

Lösung:

Sollte selbsterklärend sein.

1.MC3 [2 Punkte] Sei $y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = 0$

(B) $y_{\infty,2} = -1$

(C) $y_{\infty,2} = 1$

(D) **TRUE:** $y_{\infty,2} = \dfrac{1}{2}$

Lösung:

Weil y_∞ eine stationäre Lösung ist gilt

$$0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt $1 - 2y_{\infty,2} = 0$ und somit $y_{\infty,2} = \frac{1}{2}$.

1.A1 Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tA} für $t \geq 0$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Jordan-Normal-Form ist gegeben durch

$$J := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$e^{tA} = e^{tTJT^{-1}} = Te^{tJ}T^{-1},$$

und

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{5t} & e^{5t} + te^{5t} \\ -e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{5t}(1-t) & te^{5t} \\ -te^{5t} & e^{5t}(1+t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Lösung der DGL ist gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} te^{5t} \\ e^{5t}(1+t) \end{pmatrix}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' - 2x' + x = 0. \tag{DG}$$

(i) **[1 Punkt]** Sei nun $y(t) = (x(t), x'(t))^T$, wobei x eine Lösung von (DG) ist. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass gilt

$$y'(t) = Ay(t).$$

Lösung:

Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Differentiagleichung umschreiben, erhalten wir $x''(t) = 2x'(t) - x(t)$. Damit folgt

$$y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -x(t) + 2x'(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = Ay(t).$$

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von (DG).

Lösung:

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$.

Variante 1: Nach Satz 1.22 bilden die Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = te^t, \tag{5}$$

ein Fundamentalsystem.

Variante 2: Das Matrix Exponential ist gegeben durch

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Matrix e^{tA} bilden eine Basis des Lösungsraum von $y' = Ay$. Daraus folgt, dass die erste Zeile von e^{tA} eine Basis von (DG) bildet. Also ist

$$x_1(t) = e^t(1-t), \quad x_2(t) = te^t \tag{6}$$

eine Basis. Basen sind nicht eindeutig, (5) und (6) geht beides.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^2 2^t$. Dann ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^3}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{(s - \ln(2))^2}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2 - \ln(2)}$

(D) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{(s - \ln(2))^3}$

Lösung:

Mit dem Dämfpungssatz folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}[t^2 e^{\ln(2)t}](s) \\ &= \mathcal{L}[t^2](s - \ln(2)) \\ &= \frac{2}{(s - \ln(2))^3}. \end{aligned}$$

2.MC2 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = (t-3)^2 \vartheta(t-3)$, wobei

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-3s}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{s^2}$

(C) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = e^{-3s} \dfrac{2}{s^3}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s} \dfrac{2}{s^3}$

Lösung:

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$\mathcal{L}[(t-3)^2 \vartheta(t-3)](s) = e^{-3s} \mathcal{L}[t^2 \vartheta(t)](s) = e^{-3s} \frac{2}{s^3}.$$

2.MC3 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^{7/2}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\left[t^{5/2}\right](s) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}.$$

Dann ist die Laplace-Transformation von $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch

(A) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{s^{9/2}}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{8s^{5/2}}$

Lösung:

Mit dem Satz über Integration im Originalbereich und mit dem Hinweis folgt

$$\mathcal{L}\left[t^{7/2}\right](s) = \frac{7}{2s}\mathcal{L}\left[t^{5/2}\right](s) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}.$$

2.A1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformation von $F(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Lösung:

Nach dem Dämpfungssatz gilt

$$\mathcal{L}[e^{-3t}](s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \frac{1}{s+4}.$$

Variante 1: Nach dem Faltungs-Satz gilt

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-3t}](s)\mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \mathcal{L}[e^{-3t} * e^{-4t}](s).$$

Für die Faltung erhalten wir

$$(e^{-3u} * e^{-4u})(t) = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-4(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-4t}e^{\tau}d\tau = e^{-4t}(e^t - 1) = e^{-3t} - e^{-4t}.$$

Also ist die inverse Laplace-Transformation gegeben durch $e^{-3t} - e^{-4t}$.

Variante 2: Es gilt die Parialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4}.$$

Mit der Linerität der Laplace-Transformation folgt

$$F(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} = \mathcal{L}[e^{-3t}] - \mathcal{L}[e^{-4t}](s) = \mathcal{L}[e^{-3t} - e^{-4t}](s).$$

Also ist die inverse Laplace-Transformation gegeben durch $e^{-3t} - e^{-4t}$.

2.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$$

unter Verwendung der Laplace-Transformation.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Lösung:

Wir definieren $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$. Mit dem Ableitungs-Satz und den Anfangsbedingungen folgt

$$\mathcal{L}[\ddot{x}](s) = s\mathcal{L}[\dot{x}](s) - \dot{x}(0) = s(s\mathcal{L}[x](s) - x(0)) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - 1 \quad \text{und}$$
$$\mathcal{L}[\dot{x}](s) = sX(s)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x](s) &= s^2X(s) - 1 + 3sX(s) + 2X(s)\\ &= X(s)(s^2 + 3s + 2) - 1\end{aligned}$$

Wenn wir die Laplace-Transformation auf beiden Seiten der Differentialgleichung anwenden und nach $X(s)$ auflösen, erhalten wir

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Wir machen den Ansatz für eine Partialbruchzerlegung. Wir suchen also $A, B \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

Nach ausmultiplizieren, erhalten wir $A = 2, B = -1$ und somit

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Daraus folgern wir

$$\mathcal{L}[x](s) = X(s) = \mathcal{L}[e^{-t} - e^{-2t}](s).$$

Also ist die Lösung gegeben durch $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, wegen der Eindeutigkeit der Laplace-Transformation.

Aufgabe 3

3.MC1 [2 Punkte] Sei f die Funktion mit $f(x) = dx^2 + 1$, einer Konstante d und $x \in [-1, 1]$. Für welches d hat die 2-periodische Fortsetzung von der Funktion f den Fourier-Koeffizienten $a_0 = 4$?

(A) $d = 0$

(B) $d = 1$

(C) **TRUE:** $d = 3$

(D) $d = 2$

Lösung:

Die korrekte Antwort ist $d = 3$, da

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (dx^2 + 1)dx = \left(d \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} + 2 \right) = \left(d\frac{2}{3} + 2 \right)$$
$$= d\frac{2}{3} + 2 = 4 \iff d = 3.$$

3.MC2 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\cos(x)$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Weiterhin sei $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ die Fourier-Reihe zur Funktion von f. Dann gilt

(A) **TRUE:** $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(B) $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(C) $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(D) $b_1 = \pi$

Lösung:

Weil f ungerade und $x \mapsto \cos(nx)$ gerade ist, gilt für alle $n \geq 0$, dass

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

3.MC3 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + \pi$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dann kann f auf ganz $\mathbb{R}$ als Fourier-Reihe dargestellt werden. Welchen Wert nimmt die Fourier-Reihe von f an der Sprung-Stelle $x = \pi$ an?

(A) 1

(B) -1

(C) **TRUE:** π

(D) 2

Lösung:

Nach Satz 4.6 konvergiert die Funktion zum Mittel des linken und rechten Grenzwertes bei $x = \pi$, also gegen $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

3.A1 [3 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$. Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Lösung:

Weil die Funktion f gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine L-periodische Funktion ist, gilt die Formel

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für die gegeben Funktion erhalten wir also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhalten wir für $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3}\pi^3\right) = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\ dx \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{n}x^2 \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} x \cos(nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)\ dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n + \underbrace{\left[\frac{1}{n^2} \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

3.A2 [3 Punkte] Sei $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-x}$ für $x \in [0, 1[$ eine Funktion, die wir 1-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourier-Reihe von g.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Lösung:

Für eine L-periodische Funktion f, ist die Formel für die komplexen Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{L}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt also hier

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 e^{-x}e^{-i2\pi nx}dx \\ &= \int_0^1 e^{-(1+i2\pi n)x}dx \\ &= \frac{-1}{1+i2\pi n}\left[e^{-(1+i2\pi n)x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+i2\pi n}\left(1-e^{-1}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

4.MC1 [2 Punkte] Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion, wobei $\overline{B_1(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1, \varphi) = 3(\cos(\varphi))^2, \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dann ist das Maximum der Funktion u auf $\overline{B_1(0)}$ gegeben durch

(A) -1

(B) **TRUE:** 3

(C) 2

(D) 0

Lösung:

Wir wenden Korollar 5.11 an. Die Funktion u ist harmonisch und nicht konstant auf $\overline{B_1(0)}$. Also nimmt die Funktion ihr Maximum auf dem Rand $\partial\overline{B_1(0)}$ an. Es gilt also

$$\max_{(r,\varphi)\in\overline{B_1(0)}} u(r, \varphi) = \max_{(r,\varphi)\in\partial\overline{B_1(0)}} u(r, \varphi) = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} u(1, \varphi) = 3 \max_{\varphi\in[0,2\pi)} (\sin(\varphi))^2 = 3.$$

4.MC2 [2 Punkte] Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1, \varphi) = \begin{cases} 4 \text{ wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 \text{ wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Dann ist $u(0, 0)$ gegeben durch

(A) $\frac{1}{2}$

(B) -1

(C) 0

(D) **TRUE:** 2

Lösung:

Nach der Mittelwerteigenschaft (Satz 5.10), gilt

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 4d\varphi = 2.$$

4.MC3 [2 Punkte] Für $k \in \mathbb{R}$, definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche der folgenden Gleichungen gilt für den Parameter k, wenn u die Wellengleichung erfüllt?

(A) $k^2 = 4$

(B) $k = 3$

(C) $k = -2$

(D) **TRUE:** $k^2 = 1$

Lösung:

Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &= k\cos(kx - t), \quad & u_{xx}(t, x) &= -k^2 \sin(kx - t) \\ u_t(t, x) &= -\cos(kx - t), \quad & u_{tt}(t, x) &= -\sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Funktion u ist genau dann eine Lösung von $u_{tt} = u_{xx}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ die Beziehung

$$-\sin(kx - t) = -k^2 \sin(kx - t)$$

gilt. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $1 = k^2$ ist.

4.A1 [6 Punkte] Die Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \text{ für } 0 < x < \pi \text{ und } t > 0. \tag{PDE}$$

Ausserdem, gelten die Rand und Anfangsbedingungen

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{für } t \geq 0, \tag{RB}$$
$$u(0, x) = 2\sin(3x), \quad \text{für } 0 < x < \pi. \tag{AB}$$

(i) Führen Sie den Separationsansatz $u(x, t) = f(t)g(x)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für f und g zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für g periodische Funktionen gesucht werden. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen der Differentialgleichungen nicht konstant gleich Null sind. Schreiben Sie die allgemeinen Lösungen explizit auf.

Lösung:

Indem man den Ansatz $u(t,x)$ in (PDE) einsetzt, erhält man

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt, muss

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = \kappa$$

gelten, für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Man hat also eine Differentialgleichung für f und eine für g. Die Lösungen für f sind gegeben durch

$$Ce^{t\kappa}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Lösungen für g sind gegeben durch

$$Ae^{x\sqrt{\kappa}},\ Be^{-x\sqrt{\kappa}}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Anfangsbedingung (AB), wissen wir dass g eine nicht konstante periodische Funktion sein muss. Und daher ist $\kappa = -\omega^2 < 0$, mit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man erhält somit die beiden Differentialgleichungen

$$f'(t) = -\omega^2 f(t), \tag{7}$$
$$g''(x) = -\omega^2 g(x). \tag{8}$$

Die Lösungen für f und g sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= Ce^{-\omega^2 t}, \\ g(x) &= A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \end{aligned}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungen g_n der Differentialgleichung für g, so dass die Randbedingung $g_n(0) = g_n(\pi) = 0$ gilt. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen g_n nicht konstant gleich Null sind.

Lösung:

Aus (RB) erhalten wir $u(t,0) = f(t)g(0) = Ce^{-\omega^2 t}A = 0$ und damit $A = 0$, weil $C \neq 0$. Ausserdem folgt damit $B \neq 0$, weil sonst g konstant gleich null wäre. Wiederum aus (RB), erhalten wir $u(t,\pi) = f(t)g(\pi) = Ce^{-\omega^2 t}B\sin(\omega\pi) = 0$, und damit $\omega = n$ für $n \in \mathbb{N}$. Die gesuchten Lösungen sind also von der Form

$$g_n(x) = B_n \sin(\omega_n x) = B_n \sin(nx), \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } B_n \in \mathbb{R}.$$

(iii) Schreiben Sie die Fundamentallösungen $u_n(t,x) = f_n(t)g_n(x)$, welche (PDE) and (RB) erfüllen, explizit auf.

Lösung:

$$u_n(t,x) = f_n(t)g_n(x) = C_n e^{-n^2 t} B_n \sin(nx) = D_n e^{-n^2 t}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ D_n \in \mathbb{R}.$$

(iv) Finden Sie durch Superposition der Fundamentallösungen, also mit dem Ansatz

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n u_n(t,x),\ D_n \in \mathbb{R}$$

die Lösung von (PDE), welche die Anfangsbedingung (AB) und die Randbedingung (RB) erfüllt. Schreiben Sie die Lösung explizit hin.

Lösung:

Einsetzen von $u_n(x,t)$ ergibt

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Aus (AB) folgt

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(nx) = 2\sin(3x).$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt also $D_3 = 2$ und $D_n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$. Die Lösung ist also gegeben durch

$$u(t,x) = 2e^{-9t}\sin(3x).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**