D–MATH

Prüfung Mathematik III

401-0293-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-XXX-XXX

Prüfungs-Nr.

195

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Wir betrachten das DGL-System

$$x'(t) = Ax(t),\ t \geq 0, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A = PDP^{-1}$ mit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Lösung $t \mapsto x(t)$ des DGL-System, mit Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, gegeben durch

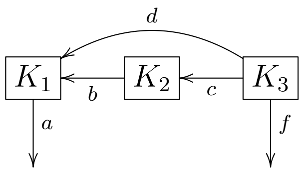
(A) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} + e^{-2t} \\ -e^{-4t} + e^{-2t} \end{pmatrix}$

(B) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(C) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(D) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}t} - 1 \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

1.MC2 [2 Punkte] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3 :



Die Stoffmengen einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten seien gegeben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Das Kompartimentmodell wird durch das folgende DGL-System beschrieben

$$Y'(t) = AY(t),\ t \geq 0, \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -b & c \\ 0 & 0 & -(c+d+f) \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ b & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+d) & a \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

1.MC3 [2 Punkte] Sei $y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,2} = 0$

(B) $y_{\infty,2} = 1$

(C) $y_{\infty,2} = \frac{1}{2}$

(D) $y_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$.

1.A1 Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(i) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tA} für $t \geq 0$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(ii) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' - 4x' + 4x = 0. \tag{195}$$

(i) **[1 Punkt]** Sei nun $y(t) = (x(t), x'(t))^T$, wobei x eine Lösung von (195) ist. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass gilt

$$y'(t) = Ay(t).$$

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von (195).

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t4^t$. Dann ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{(s - \ln(4))^2}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2 - \ln(4)}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s}$

2.MC2 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = (t-1)^3 \vartheta(t-1)$, wobei

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\dfrac{6}{s^4}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\dfrac{2}{s^5}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{s^3}$

2.MC3 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^{5/2}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.$$

Dann ist die Laplace-Transformation von $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch

(A) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{s^{5/2}}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8s^{5/2}}$

2.A1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformation von $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

2.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) + x(t) = t, \quad x(0) = 1,$$

unter Verwendung der Laplace-Transformation.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Aufgabe 3

3.MC1 [2 Punkte] Sei $L > 0$ und $f : [-L, L[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - \pi$ eine Funktion, die wir $2L$-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Für welchen Wert L ist der Fourierkoeffizient $a_0 = 0$?

(A) $L = \sqrt{3\pi}$

(B) $L = 2$

(C) $L = 3\sqrt{\pi}$

(D) $L = \sqrt{2\pi}$

3.MC2 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \cos(x)$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Weiterhin sei $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ die Fourier-Reihe zur Funktion von f. Dann gilt

(A) $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(B) $a_0 = \frac{\pi}{2}$

(C) $b_1 = \pi$

(D) $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

3.MC3 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dann kann f auf ganz $\mathbb{R}$ als Fourier-Reihe dargestellt werden. Welchen Wert nimmt die Fourier-Reihe von f an der Sprung-Stelle $x = \pi$ an?

(A) 0

(B) 2

(C) 1

(D) -1

3.A1 [3 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

3.A2 [3 Punkte] Sei $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-x/2}$ für $x \in [0, 2[$ eine Funktion, die wir 2-periodische nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourier-Reihe von g.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Aufgabe 4

4.MC1 **[2 Punkte]** Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion, wobei $\overline{B_1(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = 2(\sin(\varphi))^2, \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dann ist das Maximum der Funktion u auf $\overline{B_1(0)}$ gegeben durch

(A) 2

(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 0

4.MC2 **[2 Punkte]** Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} 2 \text{ wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 \text{ wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Dann ist $u(0,0)$ gegeben durch

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 0

(D) -1

4.MC3 **[2 Punkte]** Für $k \in \mathbb{R}$, definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto \sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche der folgenden Gleichungen gilt für den Parameter k, wenn u die Wellengleichung erfüllt?

(A) $k = -1$

(B) $4k^2 = 1$

(C) $k^2 = 4$

(D) $k = 3$

4.A1 [6 Punkte] Die Schwingung einer Saite werde modelliert durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \text{ für } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0. \tag{PDE}$$

Die Enden der Saite sind fixiert bei $x = 0$ und $x = 1$. Das heisst, es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{für } t > 0. \tag{RB}$$

Ausserdem, nehmen wir an, dass folgende Anfangsbedingungen gelten

$$u(x,0) = 4\sin(6\pi x), \quad \text{für } 0 < x < 1, \tag{AB0}$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad \text{für } 0 < x < 1. \tag{AB1}$$

(i) Führen Sie den Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für f und g zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für f periodische Funktionen gesucht werden. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen der Differentialgleichungen nicht konstant gleich Null sind.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungen f_n der Differentialgleichung für f, so dass die Randbedingung $f_n(0) = f_n(1) = 0$ gilt. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen f_n nicht konstant gleich Null sind.

(iii) Bestimmen Sie zu jedem f_n eine Lösung g_n der Differentialgleichung für g, so dass die Fundamentallösungen $u_n(x,t) = f_n(x)g_n(t)$ die Anfangsbedingung (AB1) erfüllen. Beachten Sie ausserdem, dass die Fundamentallösungen u_n nicht konstant gleich Null sind. Schreiben Sie die Fundamentallösungen u_n explizit hin.

(iv) Finden Sie durch Superposition der Fundamentallösungen, also mit dem Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t), \ C_n \in \mathbb{R}$$

die Lösung von (PDE), welche die Anfangsbedingungen (AB0), (AB1) und die Randbedingung (RB) erfüllt. Schreiben Sie die Lösung explizit hin.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**