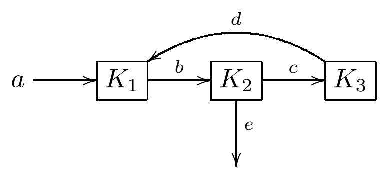
Aufgaben

1. Gegeben sei folgendes 3-Kompartiment-Modell für $a > 0$ und $0 < b, c, d, e < 1$:



a) Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t) + g(t)$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.

Wir betrachten nun das lineare DGL-System

$$x'(t) = B \cdot x(t), \quad \text{wobei } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \text{ mit Anfangswert } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix B.

c) Berechnen Sie e^{Bt}, und daraus die Lösung $x(t)$ des DGL-Systems, für alle $t \geq 0$.
Hinweis: Die Matrix B ist nicht diagonalisierbar. Verwenden Sie deswegen folgende Matrix T, um B in ihre Jordan'sche-Normalform zu transformieren:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $z(t)$ die Grösse einer gewissen Population. Die Entwicklung der Populationsgrösse werde durch die Differentialgleichung

$$z'(t) = \alpha z(t)(K - z(t))$$

beschrieben, wobei $\alpha, K > 0$ gegebene Konstanten sind.

d) Für welche Anfangswerte $z(0)$ bleibt die Populationsgrösse konstant?

e) Bestimmen sie die Lösung $z(t)$ falls $z(0) = z_0$, mit $0 < z_0 < K$.

Bitte wenden!

2. Wir suchen die Lösung $u(x,y)$ eines Laplace-Problems auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. D.h., es gelte

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } Q,$$

und die gesuchte Funktion u erfülle die Randbedingungen

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 & \text{für } 0 \leq y < 1 \\ u(1,y) = \varphi(y) & \text{für } 0 \leq y < 1 \\ u(x,0) = 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ u(x,1) = 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 1-periodische Funktion mit

$$\varphi(y) = \begin{cases} y(1-2y) & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ (1-2y)(1-y) & \frac{1}{2} < y < 1, \end{cases}$$

sei.

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.

b) Finden Sie alle Lösungen für X und Y unter Beachtung der Randbedingungen $X(0) = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst Y.

c) Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe von φ gegeben ist durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^3 (2n+1)^3} \sin(2\pi(2n+1)y).$$

Hinweis: φ ist eine ungerade Funktion.

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen für X und Y die gesuchte Funktion $u(x,y)$ mithilfe von **c)**.

Siehe nächstes Blatt!

3. In dieser Aufgabe bezeichne $\mathcal{L}\{f\}(s)$ die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$.

a) i) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{\cosh\}(s)$ direkt anhand der Definition $\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$.
Hinweis: es gilt $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

ii) Wie lautet die Laplace-Transformierte der Funktion

$$2\cosh(2t) + [2(t-2)]^2 \cdot \sigma(t-2),$$

wobei σ definiert ist durch $\sigma(t) = 1$ für $t \geq 0$ und $\sigma(t) = 0$ für $t < 0$?

b) Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung die Originalfunktion $h(t)$ zu

$$\frac{1}{s(s-a)(s-b)}, \quad \text{für beliebige } a, b > 0 \text{ mit } a \neq b.$$

c) Wir suchen die Lösung $u(t)$, $t \geq 0$, der linearen Differentialgleichung

$$\tau \cdot u'(t) + u(t) = v(t), \quad \text{mit Anfangsbedingung } u(0) = 0, \tag{2}$$

wobei $\tau > 0$ konstant und $v(\cdot)$ eine gegebene Funktion ist.

i) Seien $U(s) = \mathcal{L}\{u\}(s)$ und $V(s) = \mathcal{L}\{v\}(s)$. Bestimmen Sie U in Abhängigkeit von V und τ.

ii) Sei nun $v(t) = v(0) = v_0$ für alle $t \geq 0$. Bestimmen Sie die gesuchte Lösung $u(t)$ von (2) mittels Rücktransformation aus i).