D-HEST

Grading zur Prüfung Mathematik III, Sommer 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

Bitte wenden!

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) (4 Punkte) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

$$f(t) = \sigma(t-3)e^{t-3} + t$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$.

Lösung:
Wegen der Linearität der Laplace-Transformation und des Verschiebungssatzes gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sigma(t-3)e^{t-3}\} + \mathcal{L}\{t\} = e^{-3s}\mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{s^2} = \frac{e^{-3s}}{s-1} + \frac{1}{s^2}.$$

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{1}{(s^2+1)s}, \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

das heisst, bestimmen Sie die Funktion $h(t)$ mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{(s^2+1)s}$.

Lösung:
Es gilt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(t) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$$

Also gilt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)s}\right\} = \sin(t) * 1 = \int_0^t \sin(u) du = -\cos(u)|_0^t = -\cos(t) + 1.$$

c) (7 Punkte) Sei $y(t)$ die Lösung der Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + y \;=\; 1$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$, wobei $y'(t) = dy(t)/dt$ die Ableitung nach t bezeichnet.

Siehe nächstes Blatt!

- Bestimmen Sie $F = \mathcal{L}\{y\}$.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $y(t)$.
  Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Lösung:
Wendet man auf beiden Seiten die Laplace-Transformation an und verwendet den Ableitungssatz bekommt man:

$$(s^2F(s) - sy(0) - y'(0)) - 2(sF(s) - y(0)) + F(s) = \frac{1}{s}.$$

Wegen den Anfangsbedingungen vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$s^2F(s) - 1 - 2sF(s) + F(s) = \frac{1}{s},$$

was equivalent ist zu:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-1)^2}.$$

Wir machen den Ansatz:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

für die Partialbruchzerlegung von F. Multiplizieren mit $s(s-1)^2$ ergibt:

$$s + 1 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 1 &= -2A - B + C \\ 0 &= A + B. \end{aligned}$$

Es folgt der Reihe nach $A = 1$, $B = -1$ und $C = 2$. Somit gilt:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 1 - e^t + 2te^t.$$

Bitte wenden!

2. Fourier Reihen

Wir betrachten die Funktion $s(x)$ auf dem Intervall $x \in [-1, 1[$:

$$s(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 1 - 2x + x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ kann mit komplexen Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega x} \, .$$

a) Berechnen Sie folgendes indefinites Integral:

$$I_n := \int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{-in\omega x} \mathrm{d}x$$

für allgemeine reelle Parameter α, β, γ. Es sei $n \in \mathbb{Z}$ und $0 < \omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Linearität ausnutzen.

Lösung:
(3 Punkte)
Das Integral ist linear, also gilt:

$$\int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{-in\omega x} \mathrm{d}x = \alpha \int x^2 e^{-in\omega x} \mathrm{d}x + \beta \int x e^{-in\omega x} \mathrm{d}x + \gamma \int e^{-in\omega x} \mathrm{d}x \, .$$

Wir berechnen die Teile einzeln. Trivialerweise gilt:

$$\int e^{-in\omega x} \mathrm{d}x = \frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} = \frac{ie^{-in\omega x}}{n\omega} \, .$$

Für die beiden anderen Integrale verwenden wir partielle Integration:

$$\int u(x) v'(x) \mathrm{d}x = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) \mathrm{d}x$$

es gilt dann:

$$\begin{aligned} \int x e^{-in\omega x} \mathrm{d}x &= x \frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} - \int \frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} \mathrm{d}x \\ &= x \frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} - \frac{e^{-in\omega x}}{(-in\omega)^2} \\ &= \frac{(1 + in\omega x) e^{-in\omega x}}{n^2 \omega^2} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\int x^2 e^{-in\omega x}\mathrm{d}x = x^2\frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} - \int 2x\frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega}\mathrm{d}x$$
$$= x^2\frac{e^{-in\omega x}}{-in\omega} - \frac{2}{-in\omega}\left(\frac{(1+in\omega x)e^{-in\omega x}}{n^2\omega^2}\right)$$
$$= \frac{\left(in^2\omega^2x^2 + 2n\omega x - 2i\right)e^{-in\omega x}}{n^3\omega^3}\,.$$

Zusammen genommen haben wir:

$$I_n = \alpha\frac{\left(in^2\omega^2x^2 + 2n\omega x - 2i\right)e^{-in\omega x}}{n^3\omega^3} + \beta\frac{(1+in\omega x)e^{-in\omega x}}{n^2\omega^2} + \gamma\frac{ie^{-in\omega x}}{n\omega}\,.$$

b) Finden Sie nun die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier-Reihe der Funktion $s(x)$ mithilfe der unbestimmten Integrale I_n mit $n \in \mathbb{Z}$ und korrekten Integrationsgrenzen.

Lösung:
(3 Punkte)
Die komplexe Fourier-Reihe schreibt sich als:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega x}$$

mit Koeffizienten:

$$c_n := \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} s(x)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x\,.$$

Die Periode der Funktion $s(x)$ ist gleich der Intervalllänge, also $T = 2$ und somit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Wir berechnen das Integral als:

$$\int_{-1}^{1} s(x)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(1-x^2)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(1-2x+x^2)e^{-in\omega x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{0} e^{-in\omega x}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} x^2e^{-in\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} e^{-in\omega x}\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} xe^{-in\omega x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2e^{-in\omega x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{ie^{-in\omega x}}{n\omega}\Big|_{-1}^{0} - \frac{\left(in^2\omega^2x^2 + 2n\omega x - 2i\right)e^{-in\omega x}}{n^3\omega^3}\Big|_{-1}^{0}$$
$$+ \frac{ie^{-in\omega x}}{n\omega}\Big|_{0}^{1} - 2\frac{(1+in\omega x)e^{-in\omega x}}{n^2\omega^2}\Big|_{0}^{1} + \frac{\left(in^2\omega^2x^2 + 2n\omega x - 2i\right)e^{-in\omega x}}{n^3\omega^3}\Big|_{0}^{1}$$
$$= -\frac{i\left(-1+e^{inw}\right)}{nw} - \frac{e^{inw}((1+i)-inw)(nw+(1+i))-2i}{n^3w^3}$$
$$- \frac{i-ie^{-inw}}{nw} - 2\frac{e^{-inw}\left(inw - e^{inw}+1\right)}{n^2w^2} + \frac{e^{-inw}\left(2ie^{inw} + nw(2+inw) - 2i\right)}{n^3w^3}$$
$$= -\frac{2e^{-inw}\left(-1+e^{inw}\right)\left(e^{inw}(nw+i)-i\right)}{n^3w^3}\,.$$

Bitte wenden!

Am Ende bekommen wir:

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2e^{-inw}\left(-1+e^{inw}\right)\left(e^{inw}(nw+i)-i\right)}{n^3w^3}\right)\\ &= -\frac{e^{-inw}\left(-1+e^{inw}\right)\left(e^{inw}(nw+i)-i\right)}{n^3w^3}\end{aligned}$$

und mit $\omega = \frac{2\pi}{2}$:

$$c_n = \begin{cases} 0 & n \quad \text{gerade} \\ \frac{2\pi n + 4i}{\pi^3 n^3} & n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$

Den Fall c_0 betrachten wir getrennt:

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} s(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0}(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(1-2x+x^2)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

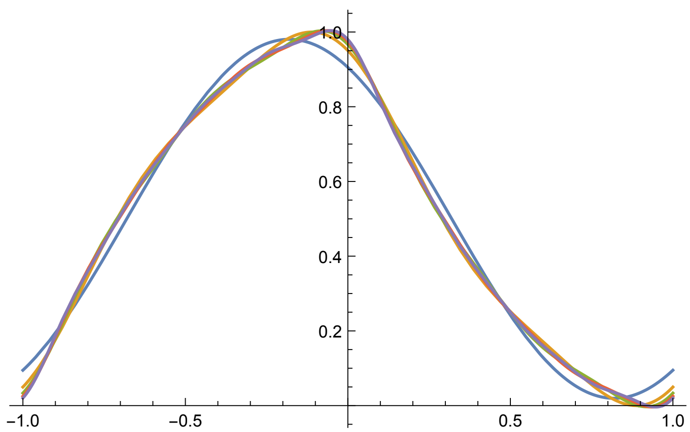


Abbildung 1: Näherungen mit $n = 2, 4, 6, 8, 10$ Reihengliedern.

c) Schliessen Sie aus den Koeffizienten c_n auf die Koeffizienten a_n, b_n der reellen Fourier-Reihenentwicklung von $s(x)$.

Lösung:
(3 Punkte)
Es gelten die Formeln:

$$\begin{aligned}a_0 &= 2c_0\\ a_n &= c_n + c_{-n} = c_n + \overline{c_n}\\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = i(c_n - \overline{c_n})\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit bekommen wir:

$$a_0 = 1$$
$$a_n = -\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0 & n \quad \text{gerade} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$
$$b_n = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^3 n^3} = \begin{cases} 0 & n \quad \text{gerade} \\ -\frac{8}{\pi^3 n^3} & n \quad \text{ungerade} \end{cases}$$

d) Ist die Funktion $s(x)$ gerade? Ist sie ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:
(2 Punkte)
Die Funktion ist weder gerade $s(x) \neq s(-x)$ noch ungerade $s(x) \neq -s(-x)$.

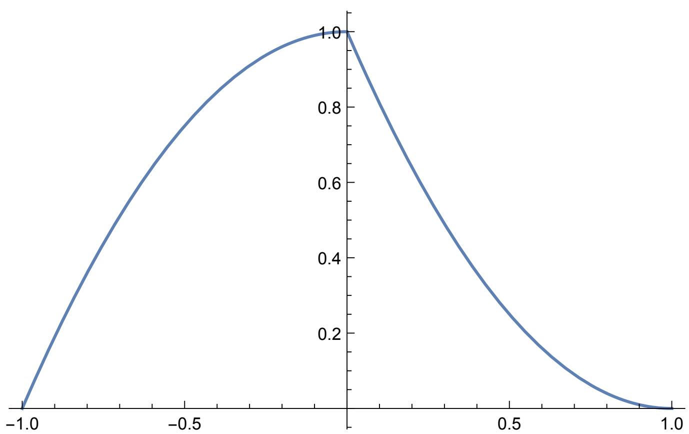


Abbildung 2: Die Funktion $s(x)$.

Beide Bedingungen sind nicht erfüllt. Die Funktion hat somit einen geraden wie auch einen ungeraden Anteil.

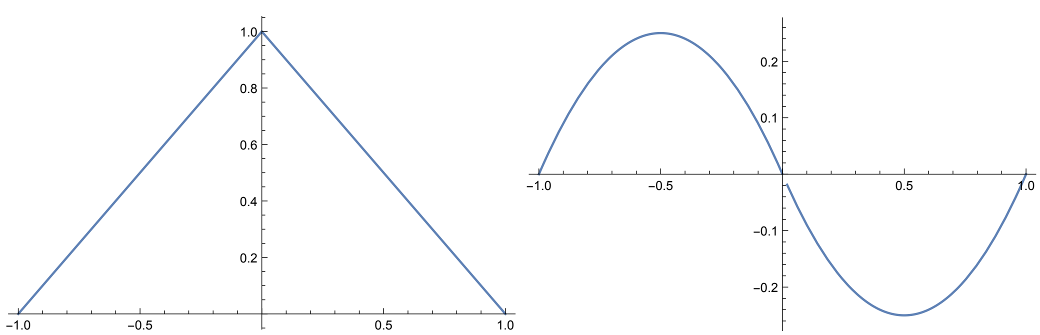


Abbildung 3: Der gerade und ungerade Anteil von $s(x)$.

Bitte wenden!

Wir betrachten nun die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$y''(x) + y(x) = s(x)$$

mit den Anfangswerten $y(-1) = 0$ und $y'(-1) = 0$. Gesucht ist die allgemeine Lösung $y(x) : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ dieser Gleichung.

e) Bestimmen Sie zunächst die Lösung der homogenen Gleichung $y''(x) + y(x) = 0$.
Lösung:
(1 Punkt)
Die Lösung der homogenen Gleichung ist $y(x) = 0$. Dies folgt direkt aus den speziellen Anfangsbedingungen $y(-1) = 0$ und $y'(-1) = 0$. (Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ und diese Anfangsbedingungen lassen nur $C_1 = C_2 = 0$ zu.)

f) Bestimmen Sie die Koeffizienten d_n der komplexen Fourier-Reihe einer partikulären Lösung y_p mithilfe des Ansatzes:

$$y_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, e^{in\omega x} \, .$$

Lösung:
(3 Punkte)
Wir verwenden den Ansatz:

$$y_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, e^{in\omega x}$$

mit den Ableitungen:

$$y_p' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega d_n \, e^{in\omega x}$$
$$y_p'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\omega^2 d_n \, e^{in\omega x} \, .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\omega^2 d_n \, e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega x}$$

woraus wir:

$$-n^2\omega^2 d_n + d_n = c_n$$

Siehe nächstes Blatt!

erhalten und folglich gilt für die Koeffizienten:

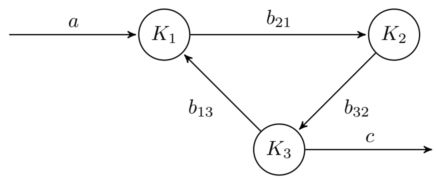
$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{c_n}{1 - n^2\omega^2} \\
&= \frac{\left((-1)^n - 1\right)(\pi n + 2i)}{\pi^5 n^5 - \pi^3 n^3} \qquad n \neq 0 \\
&= \begin{cases} 0 & n \quad \text{gerade}, n \neq 0 \\ -\frac{2(\pi n + 2i)}{\pi^5 n^5 - \pi^3 n^3} & n \quad \text{ungerade} \end{cases} \\
d_0 &= c_0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

worin $\omega = \pi$.

Bitte wenden!

3. Kompartiment-Modell

Wir betrachten folgendes Kompartiment-Modell, bestehend aus den drei Teilen K_1, K_2 und K_3.



Die Menge eines Stoffes in den einzelnen Teilen sei jeweils mit $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ bezeichnet.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichungen der Mengen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ hin.

Lösung:
(2 Punkte)
Die drei gekoppelten Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -b_{21}y_1(t) + b_{13}y_3(t) + a \\ y_2'(t) &= b_{21}y_1(t) - b_{32}y_2(t) \\ y_3'(t) &= b_{32}y_2(t) - (b_{13} + c)y_3(t) \end{aligned}$$

für $t \geq 0$.

b) Formulieren Sie ein Differentialgleichungssystem in Matrixform: $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{g}$, wobei $\mathbf{A}$ eine 3×3 Matrix ist und $\underline{y} := [y_1, y_2, y_3]^T$.

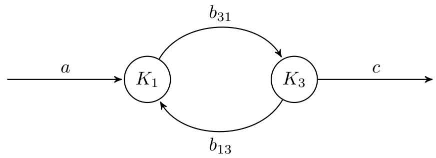
Lösung:
(2 Punkte)
Das Differentialgleichungssystem ist:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{21} & 0 & b_{13} \\ b_{21} & -b_{32} & 0 \\ 0 & b_{32} & -(b_{13} + c) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $t \geq 0$.

Es seien die Parameter gegeben: $b_{21} = 3$, $b_{32} = 3$, $b_{13} = 3$ und Zuflussrate $a = 4$ und Abflussrate $c = 8$. Da $b_{21} = b_{32}$ nehmen wir eine Vereinfachung vor und betrachten das folgende Modell wobei wir $b_{31} = 3$ setzen.

Siehe nächstes Blatt!



c) Formulieren Sie das vereinfachte System: $\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$, wobei $\mathbf{C}$ nun eine 2×2 Matrix ist und $\underline{z} := [z_1, z_3]^T$. Dabei beschreibt z_i die Konzentration des Stoffes in K_i für das vereinfachte Modell.

Lösung:
(2 Punkte)
Die Differentialgleichungen für das vereinfachte Modell lauten:

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{31} & b_{13} \\ b_{31} & -(b_{13}+c) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

und mit den konkreten Werten ergibt sich dann:

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

d) Finden Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Matrix $\mathbf{C}$.

Lösung:
(4 Punkte)
Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = -12$$
$$\lambda_2 = -2$$

und die Eigenvektoren sind:

$$\underline{\nu_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\underline{\nu_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

e) Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(t)$ des Systems für $t \geq 0$ zu dem gegebenen Anfangswert $\underline{z}(0) = [0, 1]^T$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix $\mathbf{C}$ um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

Lösung:
(4 Punkte)
Es seien:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\nu_1} & \underline{\nu_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Bitte wenden!

und:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

und die Diagonalisierung ist dann $\mathbf{C} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}$. Wir entkoppeln damit das System:

$$\begin{aligned} \underline{z}' &= \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h} \\ \underline{z}' &= \mathbf{P\Lambda P}^{-1}\underline{z} + \underline{h} \\ \mathbf{P}^{-1}\underline{z}' &= \mathbf{\Lambda P}^{-1}\underline{z} + \mathbf{P}^{-1}\underline{h} \\ \underline{u}' &= \mathbf{\Lambda}\underline{u} + \underline{\tilde{h}} \end{aligned}$$

wobei $\underline{u} = \mathbf{P}^{-1}\underline{z}$ und erhalten zwei skalare Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u_1' &= \lambda_1 u_1 + \tilde{h}_1 \\ u_3' &= \lambda_2 u_3 + \tilde{h}_2 \,. \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $\underline{u}(0) = \mathbf{P}^{-1}\underline{z}(0)$, also $u_1(0) = \frac{3}{10}$ und $u_3(0) = \frac{1}{10}$. Die Lösungen sind nun:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-12t}}{3} - \frac{1}{30} \\ \frac{3}{5} - \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

und wir bekommen mit $\underline{z} = \mathbf{P}\underline{u}$ die Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -\frac{e^{-12t}}{3} - \frac{3e^{-2t}}{2} + \frac{11}{6} \\ z_3(t) &= e^{-12t} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

f) Beschreiben Sie das Verhalten von $z_1(t)$ und $z_3(t)$ für $t \to \infty$.

Lösung:
(1 Punkt)
Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} z_1(t) &= \frac{11}{6} \\ \lim_{t\to\infty} z_3(t) &= \frac{1}{2} \,, \end{aligned}$$

beide Stoffmengen konvergieren zu stabilen Werten.

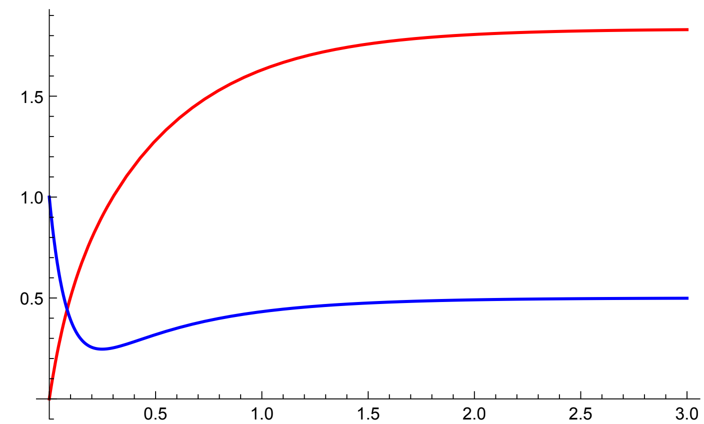


Abbildung 4: Lösungen $z_1(t)$ (rot) und $z_3(t)$ (blau).

4. Partielle Differentialgleichung

Wir suchen die Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]. \tag{1}$$

mit den Randbedingungen:

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x,1) = \sin(x) + \cos(10x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

und der Periodizitätsbedingung:

$$u(x+2\pi, y) = u(x,y) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]. \tag{3}$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Laplace-Gleichung (1) von der Form $u(x,y) = X(x)Y(y)$ welche die Periodizitätsbedingung (3) und $Y(0) = 0$ erfüllen.

Lösung:
Aus der Laplace-Gleichung folgt:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C.$$

Es gilt also:

$$X(x) = \begin{cases} A\cosh(\sqrt{C}x) + B\sinh(\sqrt{C}x) & \text{falls} \quad C > 0 \\ Ax + B & \text{falls} \quad C = 0 \\ A\cos(\sqrt{-C}x) + B\sin(\sqrt{-C}x) & \text{falls} \quad C < 0\,. \end{cases}$$

Bitte wenden!

Da X 2π-periodisch ist gilt $C = -n^2$ für ein $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $X(x) = X_n(x) = A\cos(nx) + B\sin(nx)$ und $Y(y) = Y_n(y) = D\sinh(ny) + E\cosh(ny)$. Wegen $Y(0) = 0$ folgt $E = 0$. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = (A\cos(nx) + B\sin(nx))\sinh(ny).$$

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x, y)$.

Lösung:
Wir machen den Ansatz:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))\sinh(ny)$$

und wählen die Konstanten A_n und B_n so, dass die Randbedingungen 2 erfüllt ist. Wir wählen daher $A_{10} = \frac{1}{\sinh(10)}$, $B_1 = \frac{1}{\sinh(1)}$ und alle anderen Koeffizienten gleich 0. Die Lösung lautet dann:

$$u(x, y) = \frac{\sin(x)\sinh(y)}{\sinh(1)} + \frac{\cos(10x)\sinh(10y)}{\sinh(10)}.$$

c) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $-2 \leq u(x, y) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in [0, 1]$ gilt.

Wegen dem Maximumprinzip wird das Maximum bzw. Minimum auf dem Rand angenommen und da die Werte des Sinus und Cosinus zwischen -1 und 1 liegen gilt:

$$-2 \leq \sin(x) + \cos(10x) \leq 2.$$