D-HEST

Prüfung Mathematik III, Sommer 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

Viel Erfolg!

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

$$f(t) = \sigma(t-3)e^{t-3} + t$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{1}{(s^2+1)s}, \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

das heisst, bestimmen Sie die Funktion $h(t)$ mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{(s^2+1)s}$.

c) Sei $y(t)$ die Lösung der Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + y = 1$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$, wobei $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ die Ableitung nach t bezeichnet.

- Bestimmen Sie $F = \mathcal{L}\{y\}$.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $y(t)$.
  Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Bitte wenden!

2. Fourier Reihen

Wir betrachten die Funktion $s(x)$ auf dem Intervall $x \in [-1, 1[$:

$$s(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 1 - 2x + x^2, & \text{für } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ kann mit komplexen Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{in\omega x} \, .$$

a) Berechnen Sie folgendes indefinites Integral:

$$I_n := \int (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{-in\omega x} \mathrm{d}x$$

für allgemeine reelle Parameter α, β, γ. Dabei sind $n \in \mathbb{Z}$ und $0 < \omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Linearität ausnutzen.

b) Finden Sie nun die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier-Reihe der Funktion $s(x)$ mithilfe der unbestimmten Integrale I_n mit $n \in \mathbb{Z}$ und korrekten Integrationsgrenzen.

c) Schliessen Sie aus den Koeffizienten c_n auf die Koeffizienten a_n, b_n der reellen Fourier-Reihenentwicklung von $s(x)$.

d) Ist die Funktion $s(x)$ gerade? Ist sie ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir betrachten nun die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$y''(x) + y(x) = s(x)$$

mit den Anfangswerten $y(-1) = 0$ und $y'(-1) = 0$. Gesucht ist die allgemeine Lösung $y(x) : [-1, 1[\to \mathbb{R}$ dieser Gleichung.

e) Bestimmen Sie zunächst die Lösung der homogenen Gleichung $y''(x) + y(x) = 0$.

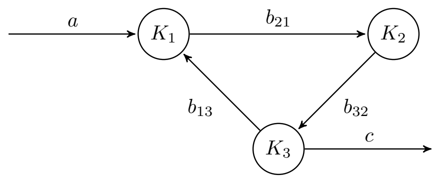
f) Bestimmen Sie die Koeffizienten d_n der komplexen Fourier-Reihe einer partikulären Lösung y_p mithilfe des Ansatzes:

$$y_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, e^{in\omega x} \, .$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Kompartiment-Modell

Wir betrachten folgendes Kompartiment-Modell, bestehend aus den drei Teilen K_1, K_2 und K_3.

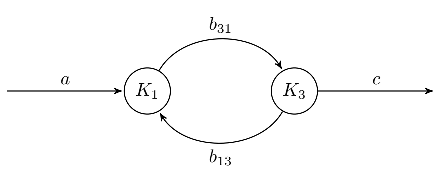


Die Menge eines Stoffes in den einzelnen Teilen sei jeweils mit $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ bezeichnet.

a) Schreiben Sie die Differentialgleichungen der Mengen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ hin.

b) Formulieren Sie ein Differentialgleichungssystem in Matrixform: $y' = \mathbf{A}y + g$, wobei $\mathbf{A}$ eine 3×3 Matrix ist und $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Es seien die Parameter gegeben: $b_{21} = 3$, $b_{32} = 3$, $b_{13} = 3$ und Zuflussrate $a = 4$ und Abflussrate $c = 8$. Da $b_{21} = b_{32}$ nehmen wir eine Vereinfachung vor und betrachten das folgende Modell wobei wir $b_{31} = 3$ setzen.



c) Formulieren Sie das vereinfachte System: $z' = \mathbf{C}z + h$, wobei $\mathbf{C}$ nun eine 2×2 Matrix ist und $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Dabei beschreibt z_i die Konzentration des Stoffes in K_i für das vereinfachte Modell.

d) Finden Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren ν_1 und ν_2 der Matrix $\mathbf{C}$.

e) Berechnen Sie die Lösung $z(t)$ des Systems für $t \geq 0$ zu dem gegebenen Anfangswert $z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix $\mathbf{C}$ um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

f) Beschreiben Sie das Verhalten von $z_1(t)$ und $z_3(t)$ für $t \to \infty$.

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichung

Wir suchen die Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]. \tag{1}$$

mit den Randbedingungen:

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x,1) = \sin(x) + \cos(10x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

und der Periodizitätsbedingung:

$$u(x+2\pi, y) = u(x,y) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Laplace-Gleichung (1) von der Form $u(x,y) = X(x)Y(y)$ welche die Periodizitätsbedingung (3) und $Y(0) = 0$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x,y)$.

c) Zeigen Sie, dass $-2 \leq u(x,y) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in [0,1]$ gilt.