D-HEST

Prüfung Mathematik III, Sommer 2018

Prof. Dr. E. W. Farkas

Viel Erfolg!

1. Laplace-Transformation *(10 Punkte)*

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \le Ce^{\alpha t}$ für $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in (\alpha_f, \infty)$, wobei $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \le Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

a) Die Funktion g sei gegeben durch $g(t) = 2^t t^2 + \cos(7t - 4)\sigma(7t - 4)$. Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $s > \ln(2)$. *(3 Punkte)*

b) Zeigen Sie allgemein, dass gilt:

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0,$$

falls die Funktion f den oben genannten Bedingungen genügt, *(2 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für eine Funktion $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt: $\left|\int_0^\infty h(t)dt\right| \le \int_0^\infty |h(t)|dt$, falls das Integral auf der rechten Seite existiert.

c) Finden Sie eine Funktion F, die *keine* inverse Laplace-Transformierte besitzt, also es *kein* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gibt mit $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$. *(1 Punkte)*

Betrachten Sie nun die Faltungsintegralgleichung

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t - u)y(u)du. \tag{1}$$

d) Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)}$. Finden Sie anschließend $y(t)$ durch Rücktransformation. *(4 Punkte)*

Hinweis: Wenden Sie den Faltungssatz auf das Integral in (1) an.

Bitte wenden!

2. Fourierreihen *(10 Punkte)*

Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = e^{2t}$ auf $[-1, 1[$, 2-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf $]-1, 1[$ gegen f, es gilt also:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \qquad \text{für } t \in]-1, 1[$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-3, 3[$. *(1 Punkt)*

b) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von f. *(2 Punkte)*

Hinweis: Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi n} = (-1)^n$.

c) Weisen Sie nach, dass für jede P-periodische Funktion g $(P > 0)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, && \text{für } n \geq 0, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), && \text{für } n \geq 1, \end{aligned}$$

zwischen komplexen und reellen Fourierkoeffizienten von g gelten. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie mit **c)** die reelle Fourierreihe von f. *(3 Punkte)*

e) Zeigen Sie mithilfe der reellen Fourierreihe von f, dass gilt:

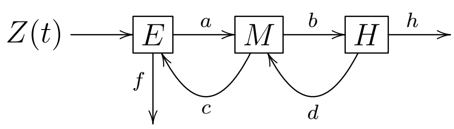
$$\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} = \frac{1}{4\sinh(2)}.$$

(2 Punkte)

Siehe nächstes Blatt!

3. Kompartimentmodell *(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)*

Ein See bestehe in einem einfachen Modell aus Kompartimenten E, M und H (Epilimnion, Metalimnion, Hypolimnion). Ab der Zeit $t = 0$ erfolgt über E der Eintrag eines Schadstoffes gemäß $Z(t) = c_0 \exp(-2t)$, der in E und H abgebaut wird. Das Modell habe folgende Form:



a) Formulieren Sie ein Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$, in dem $y(t) = (y_E(t), y_M(t), y_H(t))^\top$ die Konzentrationen des Schadstoffs in den drei Kompartimenten beschreibt. *(2 Punkte)*

Die Parameter seien nun wie folgt gewählt: $a = b = c = d = 1$ und $f = h = 2$.

b) Weisen Sie nach, dass $w_1 = (1, 2, 1)^\top$, $w_2 = (1, -1, 1)^\top$ und $w_3 = (-1, 0, 1)^\top$ Eigenvektoren von A sind und finden Sie die allgemeine Lösung des *homogenen* Systems $y_h'(t) = Ay_h(t)$. *(2 Punkte)*

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = (0, 0, 0)^\top$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $\overline{y}(t) = e^{-2t}(\alpha, \beta, \gamma)^\top$, um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden.

d) Kann es einen stationären Zustand $y_{\text{stat.}}$ geben, also eine konstante Lösung $y(t) = y_{\text{stat.}}$ von $y'(t) = Ay(t) + g(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort. *(2 Punkte)*

e) $(*)$ Betrachten Sie nun ein System $z'(t) = Bz(t) + q$, wobei B eine diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix mit strikt negativen Eigenwerten und $q \in \mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie, dass das System einen eindeutigen stationären Zustand $z_{\text{stat.}}$ besitzt und $z(t) \to z_{\text{stat.}}$ für $t \to \infty$ gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Weisen Sie hierzu nach, dass $w(t) := z(t) - z_{\text{stat.}}$ das homogene System $w'(t) = Bw(t)$ löst. Begründen Sie weiterhin, dass $\exp(tB) \to \mathbf{0}_{n\times n}$ für $t \to \infty$.

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen *(10 Punkte)*

Wir betrachten das Randwertproblem auf dem Rechteck $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$:

$$\begin{aligned} & 4\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -4\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) \\ u(x,0) &= 0, \qquad u(x,2) = 3\sin(\tfrac{\pi}{2}x) - 4\sin(\tfrac{5\pi}{2}x), \text{ für } x \in [0,1] \\ u(0,y) &= 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}u(1,y) = 0, \text{ für } y \in [0,2], \end{aligned} \tag{2}$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und Y an. *(3 Punkte)*

Hinweis: Wählen Sie das Vorzeichen der auftretenden Konstante so, dass sich für X periodische Lösungen ergeben.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für X unter Beachtung der beidseitigen Randbedingungen $X(0) = X'(1) = 0$. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für Y unter Beachtung der Randbedingung $Y(0) = 0$. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Lösung von (2), die allen Randbedingungen genügt, durch Superposition. *(3 Punkte)*