Prüfung August 2020
Lösung

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [10 Punkte]

Die Aufnahme eines Arzneistoffs sei beschrieben in einem Kompartimentmodell bestehend aus einem *zentralen Kompartiment* Z und einem *peripheren Kompartiment* P. Die Stoffmengen des Stoffs zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten werden beschrieben durch die Funktionen $t \mapsto n_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, wobei $n_1(t)$ die Stoffmenge im Kompartiment Z zur Zeit t und $n_2(t)$ die Stoffmenge im Kompartiment P zur Zeit t ist.

(a) Das Kompartimentmodell werde beschrieben durch das lineare Differentialgleichungssystem

$$n'(t) = \begin{pmatrix} -(a+k)n_1(t) + bn_2(t) + R(t) \\ an_1(t) - bn_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, k > 0$ und $R \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Schreiben Sie (1) in der Form

$$n'(t) = A \cdot n(t) + g(t)$$

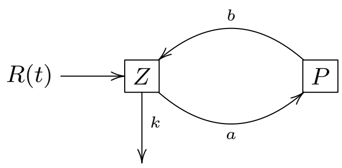
mit einer reellen 2×2 Matrix A und einer vektorwertigen Funktion $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Formulieren Sie dann das 2-Kompartimentmodell, indem sie die Pfeile ergänzen:

$\boxed{Z}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{P}$ [2 Punkte]

Lösung:
Das System (1) lässt sich schreiben als

$$n'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -(a+k) & b \\ a & -b \end{pmatrix}}_{=A} \cdot n(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} R(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=g(t)}$$

[1 Punkt]
Das zugehörige Kompartimentmodell hat die Form:



[1 Punkt]

In den Aufgabenteilen (b) und (c) seien $a = 1$, $b = 3$ und $k = 4$ in geeigneten Einheiten. Außerdem sei $R(t) = 4e^{-t}$.

Bitte wenden!

(b) Weisen Sie nach, dass $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. [1 Punkt]

Lösung:

Mit den angegebenen Werten für a, b und k haben wir $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Somit berechnen wir:

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix} = -6v_1,$$

also ist v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -6$.

[1/2 Punkt]

$$A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2v_2,$$

also ist v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$.

[1/2 Punkt]

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem bestehend aus dem linearen Differentialgleichungssystem (1) unter der Anfangsbedingung $n_1(0) = n_2(0) = 0$ durch Entkoppeln.

[5 Punkte]

Lösung:

Wir entkoppeln das System (1):

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1},$$

wobei $T = (v_1 \; v_2)$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, d.h.

$$n'(t) = T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot n(t) + g(t) \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{(T^{-1} \cdot n)'(t)}_{=\widetilde{n}'(t)} = D \cdot \underbrace{(T^{-1} \cdot n(t))}_{=\widetilde{n}(t)} + \underbrace{T^{-1} \cdot g(t)}_{=h(t)},$$

wobei wir $\widetilde{n}(t) = T^{-1} \cdot n(t)$ setzen. Wir berechnen zunächst:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \frac{1}{-3-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1 Punkt]

Weiterhin haben wir:

$$h(t) = T^{-1} \cdot g(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

[1/2 Punkt]

Damit bleibt zu lösen (beachte $\widetilde{n}(0) = T^{-1} \cdot n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \widetilde{n}_1'(t) = -6\widetilde{n}_1(t) - e^{-t}, \widetilde{n}_1(0) = 0, \\ \text{(II)} & \widetilde{n}_2'(t) = -2\widetilde{n}_1(t) + e^{-t}, \widetilde{n}_2(0) = 0. \end{array}$$

[1/2 Punkt]

Wir lösen (I):

$$\widetilde{n}_{1,hom}(t) = Ke^{-6t}, K \in \mathbb{R}$$

Für die inhomogene DGL machen wir den Ansatz

$$\widetilde{n}_{1,inh}(t) = Le^{-t} \qquad \Rightarrow \qquad -Le^{-t} = -6Le^{-t} - e^{-t}$$

woraus wir erhalten: $L = -\frac{1}{5}$, woraus sich die allgemeine Lösung ergibt

$$\widetilde{n}_1(t) = Ke^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-t}, K' \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

[1/2 Punkt]
Durch die Anfangsbedingung $\widetilde{n}_1(0) = 0$ ergibt sich unmittelbar $K = \frac{1}{5}$, also insgesamt

$$\widetilde{n}_1(t) = \frac{1}{5}(e^{-6t} - e^{-t}).$$

[1/2 Punkt]
Wir gehen für $\widetilde{n}_2$, (II) analog vor:

$$\widetilde{n}_{2,hom}(t) = K'e^{-2t}, K' \in \mathbb{R}$$

mit dem Ansatz für die inhomogene DGL

$$\widetilde{n}_{2,inh}(t) = L'e^{-t} \qquad \Rightarrow \qquad -L'e^{-t} = -2L'e^{-t} + e^{-t}$$

woraus wir erhalten: $L' = 1$, also die allgemeine Lösung:

$$\widetilde{n}_2(t) = K'e^{-2t} + e^{-t}, K' \in \mathbb{R}.$$

[1/2 Punkt]
Durch die Anfangsbedingung $\widetilde{n}_2(0) = 0$ ergibt sich $K' = -1$, also insgesamt:

$$\widetilde{n}_2(t) = -e^{-2t} + e^{-t}.$$

[1/2 Punkt]
Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\widetilde{n}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(e^{-6t} - e^{-t}) \\ -e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot n(t) \\
\Rightarrow \qquad n(t) = T \cdot \widetilde{n}(t) &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(e^{-6t} - e^{-t}) \\ -e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}e^{-6t} + \frac{8}{5}e^{-t} - e^{-2t} \\ \frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{4}{5}e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[1 Punkt]

(d) Betrachten Sie jetzt ein allgemeines abgeschlossenes 3-Kompartimentmodell, was beschrieben wird durch

$$n'(t) = B \cdot n(t) = \begin{pmatrix} -(b_{12} + b_{13}) & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & -(b_{21} + b_{23}) & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & -(b_{31} + b_{32}) \end{pmatrix} \cdot n(t) \tag{2}$$

mit Parametern $b_{ij} > 0$, $1 \leq i \neq j \leq 3$. Begründen Sie, dass $\det(B) = 0$ gilt (dies ist möglich, ohne die Determinante explizit auszurechnen) und folgern Sie, dass es einen von Null verschiedenen stationären Zustand n_∞ von (2) gibt. [2 Punkte]

Lösung:

Die Zeilen der Matrix B ergeben zusammengezählt eine Nullzeile, d.h. die Matrix B hat nicht vollen Rang, somit ist $\det(B) = 0$.
[1 Punkt]
Damit n_∞ ein stationärer Zustand gibt, muss gelten:

$$0 = \frac{d}{dt}n_\infty = B \cdot n_\infty$$

und dieses Gleichungssystem hat (unendlich viele) nichttriviale Lösungen, da $\det(B) = 0$ ist.
Bemerkung: Eine Argumentation darüber, dass B nicht vollen Rang hat, ist auch möglich.
[1 Punkt]

Bitte wenden!

2. Fourier-Reihen [10 + 2 Punkte]

Die Funktion f sei gegeben auf dem Intervall $(0, 1]$ durch

$$f(x) = x + e^{-x}.$$

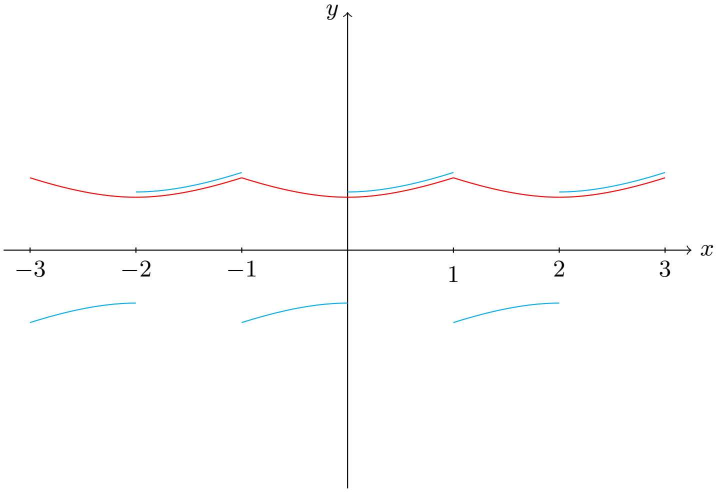
Wir definieren

- g als die *gerade* 2-periodische Fortsetzung von f nach $\mathbb{R}$ und
- u als die *ungerade* 2-periodische Fortsetzung von f nach $\mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie unten die Graphen von g und u für $-3 < x < 3$:

Lösung:

Die Graphen von g und u haben die folgende Form:



[2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion u. [3 Punkte]

Hinweis: $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Da u ungerade ist, gilt

$$a_n = 0 \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

[1 Punkt]

Für $n \geq 1$ berechnen wir jetzt

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} u(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) dx \\
&\overset{P=2}{=} 2 \int_0^1 (x + e^{-x}) \sin(\pi n x) dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx + \left[\frac{2e^{-x}}{(-1)^2 + n^2\pi^2}(-\sin(n\pi x) - \pi n \cos(n\pi x))\right]_0^1
\end{aligned}$$

[1/2 Punkt]

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + -\frac{2}{n^2\pi^2} \underbrace{[\sin(n\pi x)]_0^1}_{=0} - \frac{2\pi n(-1)^n e^{-1} + 2n\pi}{1 + n^2\pi^2} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2\pi n((-1)^{n+1} + e)}{e(1 + n^2\pi^2)}. \qquad \textit{[1/2 Punkt]}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an:

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = g(x)$$

Sie dürfen benutzen, dass die reellen Fourierkoeffizienten von g lauten:

$$a_0 = 3 - \frac{2}{e}, \qquad a_n = \frac{2(e + (-1)^{n+1})}{e(1 + \pi^2 n^2)} - \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{\pi^2 n^2}$$

[5 Punkte]

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_{hom}^{(4)}(x) - 2y_{hom}''(x) + y_{hom}(x) = 0.$$

Hierzu berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

und sehen, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ jeweils doppelte Nullstellen sind.

[1 Punkt]

Es ergibt sich also als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

[1 Punkt]

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzen wir an $y_{inh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ und lösen separat für jedes $n \geq 1$:

$$(*)_n \qquad y_n^{(4)} - 2y_n''(x) + y_n(x) = a_n \cos(n\pi x).$$

Hierzu machen wir den Ansatz $y_n(x) = \xi_n \cos(n\pi x)$ mit zu bestimmenden Koeffizienten $\xi_n \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$y_n''(x) = -\xi_n (n\pi)^2 \cos(n\pi x)$$
$$y_n^{(4)}(x) = \xi_n (n\pi)^4 \cos(n\pi x)$$

[1 Punkt]

und eingesetzt in $(*)_n$:

$$\xi_n((n\pi)^4 + 2(n\pi)^2 + 1)\cos(n\pi x) = a_n \cos(n\pi x) \qquad \Rightarrow \qquad \xi_n = \frac{a_n}{(n\pi)^4 + 2(n\pi)^2 + 1}.$$

[1 Punkt]

Wir müssen noch separat lösen:

$$y_0^{(4)} - 2y_0''(x) + y_0(x) = \frac{a_0}{2},$$

was durch die konstante Funktion $y_0(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}$ erfüllt wird.

[1/2 Punkt]

Folglich ergibt sich als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{hom}(x) + y_{inh}(x) \\ &= C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} \\ &+ \frac{3}{2} - \frac{1}{e} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(e + (-1)^{n+1})}{e(1 + n^2\pi^2)(\pi^4 n^4 + 2\pi^2 n^2 + 1)} - \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{\pi^2 n^2 (\pi^4 n^4 + 2\pi^2 n^2 + 1)} \right\} \cos(n\pi x), \end{aligned}$$

$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

[1/2 Punkt]

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

Bitte wenden!

(d) **(∗)** Sei h eine stetige periodische Funktion (mit Periode $P > 0$) und reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{H}$, definiert durch

$$\widetilde{H}(x) = \int_0^x h(t)dt - \frac{a_0}{2}x$$

eine P-periodische Funktion ist. [2 Zusatzpunkte]

Lösung:

Wir haben nachzuweisen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\widetilde{H}(x+P) = \widetilde{H}(x)$. In der Tat:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(x+P) &= \int_0^{x+P} h(t)dt - \frac{a_0}{2}(x+P) \qquad \text{[1 Punkt]} \\
&= \underbrace{\int_0^{x} h(t)dt - \frac{a_0}{2}x}_{=\widetilde{H}(x)} + \frac{P}{2}\underbrace{\frac{2}{P}\int_x^{x+P} h(t)dt}_{=a_0} - \frac{a_0}{2}P \\
&= \widetilde{H}(x)
\end{aligned}$$

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

3. Laplace-Transformation [10 + 1 Punkte]

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lautet:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

(a) Die Funktion g sei auf $[0, \infty)$ gegeben durch $g(t) = t \sinh^2(1-t)\theta(2t-1)$, wobei

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_g$ mithilfe geeigneter Transformationssätze. [5 Punkte]

Hinweis: $\sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir formen g um, damit wir den Verschiebungssatz anwenden können:

$$\begin{aligned}
g(t) &= t \sinh^2(1-t)\theta(2t-1) \\
&= t\left(\frac{1}{2}(e^{1-t} - e^{t-1})\right)^2 \theta(t - \tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{t}{4}(e^{2(t-1)} - 2 + e^{-2(t-1)})\theta(t - \tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{t}{4}(e^{-1} \cdot e^{2(t-\frac{1}{2})} - 2 + e \cdot e^{-2(t-\frac{1}{2})})\vartheta(t - \tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{t - \frac{1}{2}}{4}(e^{-1}e^{2(t-\frac{1}{2})} - 2 + e \cdot e^{-2(t-\frac{1}{2})})\theta(t - \tfrac{1}{2}) \\
&+ \frac{1}{8}(e^{-1} \cdot e^{2(t-\frac{1}{2})} - 2 + e \cdot e^{-2(t-\frac{1}{2})})\theta(t - \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

[2 Punkte]

Wir können jetzt den Verschiebungssatz (nach rechts) anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g](s) &= e^{-s/2}\mathcal{L}[t \mapsto \frac{t}{4}(e^{-1} \cdot e^{2t} - 2 + e \cdot e^{-2t})](s) \\
&+ e^{-s/2}\mathcal{L}[t \mapsto \frac{1}{8e}e^{2t} - \frac{1}{4} + \frac{e}{8}e^{-2t}] \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&\overset{\text{Dämpfungssatz}}{=} e^{-s/2}\mathcal{L}[t \mapsto \frac{t}{4e}](s-2) - \frac{e^{-s/2}}{2s^2} + e^{-s/2}\mathcal{L}[t \mapsto \frac{et}{4}](s+2) \\
&+ \frac{e^{-s/2}}{8e}\frac{1}{s-2} - \frac{e^{-s/2}}{4s} + \frac{e \cdot e^{-s/2}}{8}\frac{1}{s+2} \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{e^{-s/2}}{4e(s-2)^2} - \frac{e^{-s/2}}{2s^2} + \frac{e \cdot e^{-s/2}}{4(s+2)^2} + \frac{e^{-s/2}}{8e}\frac{1}{s-2} - \frac{e^{-s/2}}{4s} + \frac{e \cdot e^{-s/2}}{8}\frac{1}{s+2}.
\end{aligned}$$

[1 Punkt]

(b) Sei y die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(t) - y(t) = \theta(2-t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(i) Weisen Sie nach, dass

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1}$$

gelten muss.

(ii) Finden Sie y durch Rücktransformation.

[4 Punkte]

Lösung:

Bitte wenden!

(i) Wir wenden die Laplace-Transformation und Ableitungs- und Verschiebungssatz an:

$$\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[t \mapsto \theta(2-t)](s)$$
$$s^2\mathcal{L}[y] - \underbrace{y'(0)}_{=0} - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[t \mapsto 1 - \theta(t-2)](s) \qquad \textit{[1 Punkt]}$$
$$\mathcal{L}[y](s)(s^2-1) = s + \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$
$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{s^2-1} + \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2-1)} \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

(ii) Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

liefert

$$A = -1, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{2}.$$

[1 $\frac{1}{2}$ Punkte]
Zusammen mit dem Hinweis erhalten wir also:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{e^{-2s}}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{e^{-2s}}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{2}\frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

[1/2 Punkt]
Durch die inverse Laplace-Transformation bekommen wir

$$y(t) = -1 + \theta(t-2) + 2\cosh(t) - \cosh(t-2)\theta(t-2).$$

[1/2 Punkt]

(c) Begründen Sie, dass die Funktion F gegeben durch $F(s) = \frac{s^2}{s-1}$ keine *inverse* Laplace-Transformierte besitzt (also keine stückweise stetige Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_f < \infty$ existiert, sodass $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$). [1 Punkt]

Lösung:
Für eine Laplace-Transformierte $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ gilt $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} F(s) = 0$, was hier wegen

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \infty$$

(mit $s \in \mathbb{R}$) nicht erfüllt ist.
[1 Punkt]
Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) $(*)$ Entscheiden Sie mit Begründung, welche der folgenden Funktionen eine Laplace-Transformierte besitzen, also ob $\alpha_{f_i} < \infty$ gilt:
   (i) $f_1(t) = t^{t^2}\theta(t-1)$
   (ii) $f_2 =$ die 2020-periodische Fortsetzung von $t \mapsto e^{te^t}$ nach $\mathbb{R}_+$.

[1 Zusatzpunkt]

Lösung:
f_1 besitzt keine Laplace-Transformierte: Angenommen, es gäbe $C, \alpha > 0$ mit $|f_1(t)| \le Ce^{\alpha t}$ für alle $t \ge 0$, dann wäre

$$n^{n^2} \le Ce^{\alpha n} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{n^2\ln(n) - \alpha n} \le C,$$

Widerspruch.
[1/2 Punkt]
Die Funktion f_2 besitzt eine Laplace-Transformierte, da $|f_2(t)| \le \max_{t\in[0,2020]} e^{te^t} < \infty$ (also ist $\alpha_{f_2} \le 0$).
[1/2 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

4. Partielle Differentialgleichungen [10 + 2 Punkte]

Wir betrachten zunächst das folgende Randwertproblem:

(PDE)	$\Delta u(x,y) = u_x(x,y)$,	für $(x,y) \in (0,2) \times (0,4)$
$(\mathrm{RB})_1$	$u(x,0) = 0$,	für $0 \le x \le 2$
$(\mathrm{RB})_2$	$u(x,4) = 2$,	für $0 \le x \le 2$
$(\mathrm{RB})_3$	$u(0,y) = \frac{y}{2}$,	für $0 \le y \le 4$
$(\mathrm{RB})_4$	$u(2,y) = \varphi(y)$,	für $0 \le y \le 4$

mit $\varphi(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y < 2, \\ 2, & 2 \le y \le 4 \end{cases}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion v mit $v(x,y) = \frac{y}{2}$ (PDE) löst und die Randbedingungen $(\mathrm{RB})_1$ bis $(\mathrm{RB})_3$ erfüllt. [2 Punkte]

Lösung:
Man sieht unmittelbar:

$$\Delta v(x,y) = \partial^2_{xx}(\frac{y}{2}) + \partial^2_{yy}(\frac{y}{2}) = 0 = \partial_x(\frac{y}{2}) \qquad \Rightarrow (\mathrm{PDE}) \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

$$v(x,0) = \frac{0}{2} = 0 \qquad \Rightarrow (\mathrm{RB})_1 \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

$$v(x,4) = \frac{4}{2} = 2 \qquad \Rightarrow (\mathrm{RB})_2 \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

$$v(0,y) = \frac{y}{2} \qquad \Rightarrow (\mathrm{RB})_3 \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

(b) Sei u eine Lösung von (PDE) mit den Randbedingungen $(\mathrm{RB})_1 - (\mathrm{RB})_4$. Betrachten Sie für ein solches u nun $\widetilde{u}(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ und zeigen Sie, dass $\widetilde{u}$ das folgende System löst:

(PDE)	$\Delta\widetilde{u}(x,y) = \widetilde{u}_x(x,y)$,	für $(x,y) \in (0,2) \times (0,4)$
$(\mathrm{RB})'_1$	$\widetilde{u}(x,0) = 0$,	für $0 \le x \le 2$
$(\mathrm{RB})'_2$	$\widetilde{u}(x,4) = 0$,	für $0 \le x \le 2$
$(\mathrm{RB})'_3$	$\widetilde{u}(0,y) = 0$,	für $0 \le y \le 4$
$(\mathrm{RB})'_4$	$\widetilde{u}(2,y) = \psi(y)$,	für $0 \le y \le 4$

mit $\psi(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0 \le y < 2, \\ 2 - \frac{y}{2}, & 2 \le y \le 4 \end{cases}$.

Lösen Sie das entstandene System durch Separation der Variablen und einem Superpositionsansatz. Geben Sie dann die Lösung des Systems bestehend aus (PDE) mit Randbedingungen $(\mathrm{RB})_1$ bis $(\mathrm{RB})_4$ an. [6 Punkte]

Hinweis: Verwenden Sie **ohne Beweis**, dass gilt:

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{4} y\right)$$

Lösung:
Sei also u eine Lösung von (PDE) mit $(\mathrm{RB})_1$ bis $(\mathrm{RB})_4$.
Wegen der Linearität gilt dann

$$\Delta\widetilde{u}(x,y) = \Delta(u-v)(x,y) = \partial_x u(x,y) - \partial_x v(x,y) = \partial_x(u-v)(x,y) = \partial_x\widetilde{u}(x,y)$$

[1/2 Punkt]
und analog:

$$\widetilde{u}(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 0 - 0 = 0,$$
$$\widetilde{u}(x,4) = u(x,4) - v(x,4) = 2 - 2 = 0,$$
$$\widetilde{u}(0,y) = u(0,y) - v(0,y) = \tfrac{y}{2} - \tfrac{y}{2} = 0,$$
$$\widetilde{u}(2,y) = u(2,y) - v(2,y) = \phi(y) - \tfrac{y}{2} = \psi(y).$$

Bitte wenden!

[1/2 Punkt]
Wir machen nun den Separationsansatz $\widetilde{u}(x,y) = X(x)Y(y)$ und erhalten

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X'(x)Y(y)$$
$$\Rightarrow \qquad -\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\omega^2$$

mit einer Konstante $\omega > 0$, die wir so wählen, dass sich für Y periodische Lösungen ergeben. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{DGL})_x & X''(x) - X'(x) - \omega^2 X(x) = 0 \\ &(\mathrm{DGL})_y & Y''(x) + \omega^2 Y(y) = 0 \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Wegen $(\mathrm{RB})_1$: $\widetilde{u}(x,0) = X(x)Y(0) = 0$ erhalten wir die Randbedingung $Y(0) = 0$ und analog aus $(\mathrm{RB})_2$ und $(\mathrm{RB})_3$: $Y(4) = 0$ und $X(0) = 0$.
[1 Punkt]
Für Y erhalten wir als allgemeine Lösung für $(\mathrm{DGL})_y$:

$$Y(y) = A\cos(\omega y) + B\sin(\omega y), A, B \in \mathbb{R}$$

und unter Beachtung der Randbedingungen $Y(0) = Y(4) = 0$ ergibt sich

$$Y(0) = 0 = A, \qquad Y(4) = B\sin(4\omega) = 0,$$

also $\omega = \omega_n = \frac{\pi n}{4}$, wobei $n = 1, 2, 3, ...$, also

$$Y_n(y) = B_n \sin(\tfrac{\pi n}{4} y).$$

[1 Punkt]
Für X ergibt sich als allgemeine Lösung für $(\mathrm{DGL})_x$:

$$X_n(x) = C_n e^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{16}}\right)x} + D_n e^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{16}}\right)x}$$

und unter Beachtung der Randbedingung $X(0) = 0$ ergibt sich

$$X_n(0) = C_n + D_n = 0 \qquad D_n = -C_n$$

also

$$X_n(x) = \widetilde{C_n} e^{\frac{1}{2}x} \sinh\left(\sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{\pi^2 n^2}{16}}\, x\right).$$

[1 Punkt]
Wir machen den Superpositionsansatz

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{F_n}_{:=B_n \widetilde{C_n}} \sin\left(\frac{\pi n}{4} y\right) e^{\frac{1}{2}x} \sinh\left(\sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{\pi^2 n^2}{16}}\, x\right) \\ \Rightarrow \qquad \widetilde{u}(2,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{F_n}_{:=B_n \widetilde{C_n}} \sin\left(\frac{\pi n}{4} y\right) e \cdot \sinh\left(2\sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{\pi^2 n^2}{16}}\right) \\ &\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2 (2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4} y\right) = \psi(y). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$F_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2 e \sinh\left(2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\pi^2(2k+1)^2}{16}}\right)}, \qquad F_{2k} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

[1 Punkt]
woraus sich dann ergibt:

$$u(x, y) = \frac{y}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{4} y\right) e^{\frac{x}{2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\pi^2(2k+1)^2}{16}}\, x\right)}{\pi^2(2k+1)^2 e \sinh\left(2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\pi^2(2k+1)^2}{16}}\right)}.$$

(c) Berechnen Sie den Wert $w(0, 0)$, wobei w die Lösung des Randwertproblems ist:

$(\mathrm{PDE})_{\mathrm{II}}$	$\Delta w(x, y) = 0,$	$x^2 + y^2 < 5$
$(\mathrm{RB})_{\mathrm{II}}$	$w(x, y) = 1 + x^2 y,$	$x^2 + y^2 = 5$

Benutzen Sie hierfür die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. [2 Punkte]

Lösung:
Wir rechnen in Polarkoordinaten ($x = \sqrt{5}\cos(\phi)$ und $y = \sqrt{5}\sin(\phi)$):

$$\begin{aligned} w(0,0) &\overset{MWE}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 + 5^{3/2}\cos^2(\phi)\sin(\phi))d\phi \qquad \textit{[1 Punkt]} \\ &= 1 + 5^{3/2}\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\phi)\right]_0^{2\pi} = 1. \qquad \textit{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe ist eine *Bonusaufgabe*:

(d) **(∗)** Sei A eine reelle 3×3-Matrix. Zeigen Sie, dass die Funktion g mit

$$g(x_1, x_2, x_3) = x \cdot (Ax)$$

genau dann harmonisch ist, wenn die Spur von A, definiert als $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{ii}$, verschwindet. Dabei ist $\cdot$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. [2 Zusatzpunkte]

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} x_i x_j \\ &= A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + (A_{12} + A_{21})x_1x_2 + (A_{13} + A_{31})x_1x_3 + (A_{23} + A_{32})x_2x_3 \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Damit ist $\Delta g(x_1, x_2, x_3) = 2(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = 2\mathrm{Tr}(A)$, woraus sich sofort ergibt, dass g auf $\mathbb{R}^3$ harmonisch ist genau dann, wenn $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
[1 Punkt]

Bitte wenden!