Prof. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2020**

D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

Prüfung zur Vorlesung Mathematik III

Bitte ausfüllen!

Nachname		Vorname		Legi-Nummer							
				X	X						

jeweils die ersten zwei Buchstaben *letzte sechs Ziffern*

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (= 10 Bl.) eigene Notizen, am PC geschrieben oder von Hand, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** die ersten beiden Buchstaben Ihres Vor- und Nachnamens, sowie die letzten sechs Ziffern Ihrer Legi in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab. Beschriften Sie alle zusätzlichen Blätter analog.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift und **nicht** mit roter oder grüner Farbe.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes!
- **Am Ende der Prüfung:**
  1. Ordnen Sie die Blätter, auf denen Sie die Aufgaben bearbeitet haben.
  2. Stecken Sie diese Blätter mit Ihrer Prüfung an oberster Stelle in den bereitliegenden Umschlag. Dieser soll **nicht** verschlossen werden.

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte Total	Kontrolle Total	Max
1			10
2			$10 + 2\ (*)$
3			$10 + 1\ (*)$
4			$10 + 2\ (*)$
Total			$40 + 5\ (*)$

Die maximale Punktzahl ist 40.
Es gibt 5 *Zusatzpunkte*.

Viel Erfolg!

Aufgaben

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [10 Punkte]

Die Aufnahme eines Arzneistoffs sei beschrieben in einem Kompartimentmodell bestehend aus einem *zentralen Kompartiment* Z und einem *peripheren Kompartiment* P. Die Stoffmengen des Stoffs zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten werden beschrieben durch die Funktionen $t \mapsto n_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, wobei $n_1(t)$ die Stoffmenge im Kompartiment Z zur Zeit t und $n_2(t)$ die Stoffmenge im Kompartiment P zur Zeit t ist.

(a) Das Kompartimentmodell werde beschrieben durch das lineare Differentialgleichungssystem

$$n'(t) = \begin{pmatrix} -(a+k)n_1(t) + bn_2(t) + R(t) \\ an_1(t) - bn_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit Konstanten $a, b, k > 0$ und $R \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Schreiben Sie (1) in der Form

$$n'(t) = A \cdot n(t) + g(t)$$

mit einer reellen 2×2 Matrix A und einer vektorwertigen Funktion $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Formulieren Sie dann das 2-Kompartimentmodell, indem sie die Pfeile ergänzen:

$$\boxed{Z} \qquad\qquad \boxed{P}$$

[2 Punkte]

In den Aufgabenteilen (b) und (c) seien $a = 1$, $b = 3$ und $k = 4$ in geeigneten Einheiten. Außerdem sei $R(t) = 4e^{-t}$.

(b) Weisen Sie nach, dass $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. [1 Punkt]

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem bestehend aus dem linearen Differentialgleichungssystem (1) unter der Anfangsbedingung $n_1(0) = n_2(0) = 0$ durch Entkoppeln. [5 Punkte]

(d) Betrachten Sie jetzt ein allgemeines abgeschlossenes 3-Kompartimentmodell, was beschrieben wird durch

$$n'(t) = B \cdot n(t) = \begin{pmatrix} -(b_{12}+b_{13}) & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & -(b_{21}+b_{23}) & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & -(b_{31}+b_{32}) \end{pmatrix} \cdot n(t) \tag{2}$$

mit Parametern $b_{ij} > 0$, $1 \leq i \neq j \leq 3$. Begründen Sie, dass $\det(B) = 0$ gilt (dies ist möglich, ohne die Determinante explizit auszurechnen) und folgern Sie, dass es einen von Null verschiedenen stationären Zustand n_∞ von (2) gibt. [2 Punkte]

Bitte wenden!

2. Fourier-Reihen [10 + 2 Punkte]

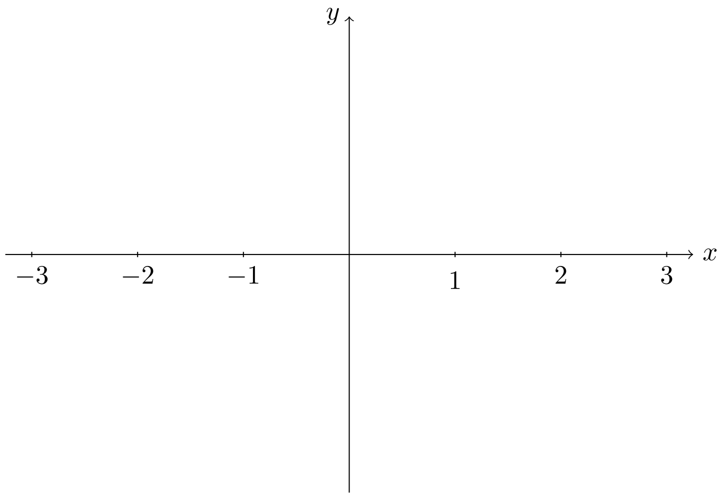
Die Funktion f sei gegeben auf dem Intervall $(0,1]$ durch

$$f(x) = x + e^{-x}.$$

Wir definieren

- g als die *gerade* 2-periodische Fortsetzung von f nach $\mathbb{R}$ und
- u als die *ungerade* 2-periodische Fortsetzung von f nach $\mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie unten die Graphen von g und u für $-3 < x < 3$:



[2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion u. [3 Punkte]
Hinweis: $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x)) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an:

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = g(x)$$

Sie dürfen benutzen, dass die reellen Fourierkoeffizienten von g lauten:

$$a_0 = 3 - \frac{2}{e}, \qquad a_n = \frac{2(e + (-1)^{n+1})}{e(1 + \pi^2 n^2)} - \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{\pi^2 n^2}$$

[5 Punkte]

Die folgende Aufgabe ist eine *<u>Bonusaufgabe</u>*:

(d) **(∗)** Sei h eine stetige periodische Funktion (mit Periode $P > 0$) und reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{H}$, definiert durch

$$\widetilde{H}(x) = \int_0^x h(t)dt - \frac{a_0}{2}x$$

eine P-periodische Funktion ist. [2 Zusatzpunkte]

Siehe nächstes Blatt!

3. Laplace-Transformation [10 + 1 Punkte]

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lautet:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

(a) Die Funktion g sei auf $[0,\infty)$ gegeben durch $g(t) = t \sinh^2(1-t)\theta(2t-1)$, wobei

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_g$ mithilfe geeigneter Transformationssätze. [5 Punkte]
Hinweis: $\sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Sei y die Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(t) - y(t) = \theta(2-t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(i) Weisen Sie nach, dass

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2-1)} + \frac{s}{s^2-1}$$

gelten muss.

(ii) Finden Sie y durch Rücktransformation.
Hinweis: Sie dürfen **ohne Beweis** verwenden, dass gilt $\frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$ und $\frac{1}{s(s^2-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$.

[4 Punkte]

(c) Begründen Sie, dass die Funktion F gegeben durch $F(s) = \frac{s^2}{s-1}$ keine *inverse* Laplace-Transformierte besitzt (also keine stückweise stetige Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha_f < \infty$ existiert, sodass $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f$). [1 Punkt]

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) **(∗)** Entscheiden Sie mit Begründung, welche der folgenden Funktionen eine Laplace-Transformierte besitzen, also ob $\alpha_{f_i} < \infty$ gilt:

(i) $f_1(t) = t^{t^2}\theta(t-1)$

(ii) $f_2 =$ die 2020-periodische Fortsetzung von $t \mapsto e^{te^t}$ nach $\mathbb{R}_+$.

[1 Zusatzpunkt]

4. Partielle Differentialgleichungen [10 + 2 Punkte]

Wir betrachten zunächst das folgende Randwertproblem:

(PDE)	$\Delta u(x,y) = u_x(x,y),$	für $(x,y) \in (0,2) \times (0,4)$
$(\text{RB})_1$	$u(x,0) = 0,$	für $0 \le x \le 2$
$(\text{RB})_2$	$u(x,4) = 2,$	für $0 \le x \le 2$
$(\text{RB})_3$	$u(0,y) = \dfrac{y}{2},$	für $0 \le y \le 4$
$(\text{RB})_4$	$u(2,y) = \varphi(y),$	für $0 \le y \le 4$

mit $\varphi(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y < 2, \\ 2, & 2 \le y \le 4 \end{cases}.$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion v mit $v(x,y) = \frac{y}{2}$ (PDE) löst und die Randbedingungen $(\text{RB})_1$ bis $(\text{RB})_3$ erfüllt. [2 Punkte]

(b) Sei u eine Lösung von (PDE) mit den Randbedingungen $(\text{RB})_1 - (\text{RB})_4$. Betrachten Sie für ein solches u nun $\widetilde{u}(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ und zeigen Sie, dass $\widetilde{u}$ das folgende System löst:

(PDE)	$\Delta \widetilde{u}(x,y) = \widetilde{u}_x(x,y),$	für $(x,y) \in (0,2) \times (0,4)$
$(\text{RB})_1'$	$\widetilde{u}(x,0) = 0,$	für $0 \le x \le 2$
$(\text{RB})_2'$	$\widetilde{u}(x,4) = 0,$	für $0 \le x \le 2$
$(\text{RB})_3'$	$\widetilde{u}(0,y) = 0,$	für $0 \le y \le 4$
$(\text{RB})_4'$	$\widetilde{u}(2,y) = \psi(y),$	für $0 \le y \le 4$

mit $\psi(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0 \le y < 2, \\ 2 - \frac{y}{2}, & 2 \le y \le 4 \end{cases}.$

Lösen Sie das entstandene System mithilfe von Separation der Variablen und einem Superpositionsansatz. Geben Sie dann die Lösung des Systems bestehend aus (PDE) mit Randbedingungen $(\text{RB})_1$ bis $(\text{RB})_4$ an. [8 Punkte]

Hinweis: Verwenden Sie **ohne Beweis**, dass gilt:

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \sin\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{4} y\right).$$

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(c) **(∗)** Berechnen Sie den Wert $w(0,0)$, wobei w die Lösung des Randwertproblems ist:

$(\text{PDE})_{\text{II}}$	$\Delta w(x,y) = 0,$	$x^2 + y^2 < 5$
$(\text{RB})_{\text{II}}$	$w(x,y) = 1 + x^2 y,$	$x^2 + y^2 = 5$

Benutzen Sie dazu die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen. [2 Zusatzpunkte]