Prof. E. W. Farkas **ETH Zürich, 2. August 2022**

D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

Musterlösung zur Prüfung in Mathematik III

---

1. Fourierreihen [Total 10 Punkte]

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

(a) [2 Punkte] Setzen Sie die Funktion f zu einer ungeraden Funktion auf $(-\pi, \pi]$ fort.

(b) [2 Punkte] Betrachten Sie die ungerade $2\pi-$periodische Fortsetzung $x \mapsto F(x)$ und skizzieren Sie den Graph für $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von F.

(d) Wir bezeichnen mit $D \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}$ in welchen die Fourierreihe von F punktweise gegen F konvergiert.

(i) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

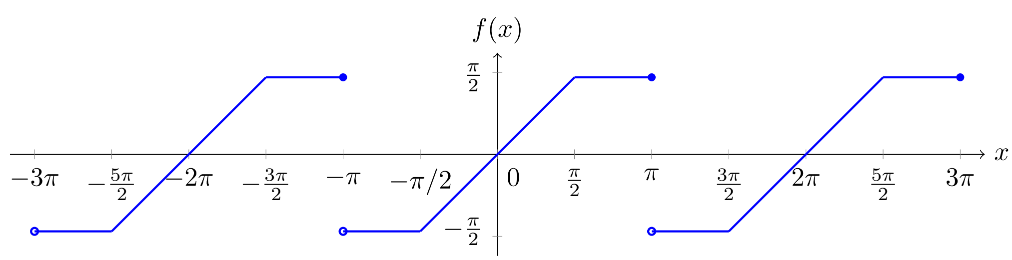
(ii) [1 Punkt] Bestimmen Sie für alle $x \notin D$ den Grenzwert der Fourierreihe von F im Punkt x.

Lösung:

(a) Die ungerade Fortsetzung f_u der Funktion f auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ ist gegeben durch

$$f_u(x) = \begin{cases} \pi/2, & \text{wenn} \quad \pi/2 \le x \le \pi \\ x, & \text{wenn} \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ -\pi/2, & \text{wenn} \quad -\pi < x \le -\pi/2. \end{cases}$$

(b)



[1]

[1] Die ungerade $2\pi-$periodische Fortsetzung $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$F(x) = f_u(x - 2k\pi), \quad \text{wenn} \quad x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Da F eine ungerade $2\pi-$periodische Funktion ist, gilt $a_n = 0$ für all $n \in \mathbb{N}_0$. Als nächstes berechnen wir die Koeffizienten b_n für $n \in \mathbb{N}$. Da F ungerade ist, folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx - \frac{\pi}{2n}\cos(nx)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2n}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2n}\cos(n\pi)\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad n \in 2\mathbb{N}_0 \\ 1, & \text{wenn} \quad n \in 4\mathbb{N}_0 + 1 \\ -1, & \text{wenn} \quad n \in 4\mathbb{N}_0 + 3 \end{cases}$$

folgt

$$b_{2k} = -\frac{1}{2k}, \quad b_{4k+1} = \frac{2}{\pi(4k+1)^2} + \frac{1}{4k+1}, \quad b_{4k+3} = -\frac{2}{\pi(4k+3)^2} + \frac{1}{4k+3}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

(d) Die $2\pi-$periodische Funktion F erfüllt die Dirichlet-Bedingungen aus Satz 1.5 und damit wissen wir, dass die Fourierreihe von F für jedes $x \in \mathbb{R}$ punktweise gegen das artithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes in x konvergiert. Da die Fortsetzung bis auf die Punkte $x \in \pi(2\mathbb{Z}+1)$ stetig ist, konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen F für $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\pi$. In den Punkten $x \in (2k+1)\pi$ gilt

$$\lim_{x \downarrow (2k+1)\pi} F(x) = -\pi/2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow (2k+1)\pi} F(x) = \pi/2$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und somit erhalten wir

$$\frac{\lim_{x\downarrow(2k+1)\pi} F(x) + \lim_{x\uparrow(2k+1)\pi} F(x)}{2} = 0$$

für $k \in \mathbb{Z}$, jedoch gilt $F((2k+1)\pi) = \pi/2$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt:

(i) $D = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\pi$

(ii) und die Fourierreihe konvergiert für $x \in (2\mathbb{Z}+1)\pi$ gegen 0.

2. Laplace-Transformation [Total 10 Punkte]

(a) [3 Punkte] Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \cosh^2(t/3) + (t-2)^4\sigma(t-2),$$

wobei $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ und $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$, direkt aus der Definition der Laplace-Transformation.

(b) [3 Punkte] Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)}.$$

(c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' + 5y' + 6y = \sigma(t-\pi)\cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(d) [2 Punkte] Bestimmen Sie alle Lösungen $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender Gleichung

$$\int_0^t x(s)x(t-s)\,ds = 3tx(t),$$

wobei $t \geq 0$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \cosh^2(t/3)e^{-st}\,dt + \int_2^\infty (t-2)^4 e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{2t/3} + e^{-2t/3} + 2}{4} e^{-st}\,dt + e^{-2s}\int_0^\infty r^4 e^{-sr}\,dr \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^\infty e^{-(s-2/3)t}\,dt + \int_0^\infty e^{-(s+2/3)t}\,dt + 2\int_0^\infty e^{-st}\,dt\right) + e^{-2s}\int_0^\infty r^4 e^{-sr}\,dr.
\end{aligned}$$

Für $s > 2/3$ konvergieren alle Integrale in den Klammern und es gilt

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}, \quad \int_0^\infty e^{-(s-2/3)t}\,dt = \frac{1}{s-2/3}, \quad \int_0^\infty e^{-(s+2/3)t}\,dt = \frac{1}{s+2/3}.$$

Das letzte Integral vereinfachen wir mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r^4 e^{-sr}\,dr &= -\frac{1}{s}\int_0^\infty r^4 \frac{d}{dr} e^{-sr}\,dr = \frac{4}{s}\int_0^\infty r^3 e^{-sr}\,dr \\
&= -\frac{4}{s^2}\int_0^\infty r^3 \frac{d}{dr} e^{-sr}\,dr = \frac{12}{s^2}\int_0^\infty r^2 e^{-sr}\,dr \\
&= \frac{24}{s^3}\int_0^\infty r e^{-sr}\,dr = -\frac{24}{s^4}\left(re^{-sr}|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-sr}\,dr\right) \\
&= -\frac{24}{s^5} e^{-sr}|_0^\infty = \frac{24}{s^5}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

wobei wir $s > 0$ angenommen haben und $r^n e^{-sr}|_0^\infty = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ verwendeten. Es folgt nun

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2/3} + \frac{1}{s+2/3} + \frac{2}{s}\right) + \frac{24}{s^5}e^{-2s} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2/3} + \frac{1}{s+2/3}\right) + \frac{1}{2s} + \frac{24}{s^5}e^{-2s}.\end{aligned}$$

(b) Wir machen den Ansatz

$$\frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)} = \frac{a+sb}{s^2+2s+5} + \frac{c}{s+3}$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$\begin{aligned}&(a+sb)(s+3) + c(s^2+2s+5) = s+2 \quad \Leftrightarrow \\ &as + 3a + bs^2 + 3bs + cs^2 + 2cs + 5c = s+2 \quad \Leftrightarrow \\ &(b+c)s^2 + (a+3b+2c)s + (3a+5c) = s+2\end{aligned}$$

und mit Koeffizientenvergleich erhalten wir $a = 7/8$, $b = 1/8$, $c = -1/8$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)} &= \frac{1}{8}\frac{s+7}{s^2+2s+5} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+3} \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{s+7}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{s+3}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{s+3}\right).\end{aligned}$$

Der Dämpfungssatz (Proposition 4.12) und die Identitäten

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}[\cos(at)](s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = \frac{1}{s-\alpha} \tag{1}$$

für $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zeigen, dass gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)}\right](t) = \frac{\cos(2t) + 3\sin(2t)}{8}e^{-t} - e^{-3t}.$$

(c) Wir beobachten zuerst dass $\cos(t) = -\cos(t-\pi)$ und damit folgt mit dem Verschiebungssatz (Proposition 4.10), der Ableitungsregel (Proposition 4.18) und der Identität für den cosinus in (1), dass gilt

$$\begin{aligned}&s^2Y - sy(0) - y'(0) + 5(sY - y(0)) + 6Y = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s} \quad \Leftrightarrow \\ &s^2Y + 5sY + 6Y = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s},\end{aligned}$$

wobei $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$. Damit folgt

$$Y(s) = -\frac{s}{(s^2+1)(s^2+5s+6)}e^{-\pi s}.$$

(d) Als erstes stellen wir fest, dass $x \equiv 0$ eine Lösung ist und nun wollen wir alle nicht-trivialen Lösungen bestimmen. Das Integral auf der linken Seite ist die Faltung von $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

mit sich selbst. Damit erhalten wir mit dem Faltungssatz (Proposition 4.29) und Proposition 4.19 (Ableitung im Bildbereich) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X^2(s) = -3\frac{dX}{ds},$$

wobei $X(s) = \mathcal{L}x(s)$. Mit Separation der Variablen folgt

$$X(s) = \frac{3}{t+a}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und somit erhalten wir mit der dritten Identität von Gleichung (1) die Lösungen $x_a(t) = 3e^{-at}$ für $a \in \mathbb{R}$.

3. Partielle Differentialgleichungen [Total 10 Punkte]

Lösen Sie Teilaufgabe (a) oder Teilaufgabe (b). Es wird jeweils nur eine Teilaufgabe bewertet.

(a) Betrachten Sie das folgende Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{für} \quad x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, & \text{für} \quad t > 0, \\ u(x,0) = 5\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right), & \text{für} \quad x \in [0,3]. \end{cases} \tag{2}$$

(i) [6 Punkte] Finden Sie mithilfe der Methode der Separation der Variablen die allgemeine Lösung von (2).

(ii) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung von Gleichung (2).

(b) Betrachten Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta u(r,\vartheta) = 0, & \text{für} \quad r \in [0,1),\ \vartheta \in [0,2\pi), \\ u(1,\vartheta) = \sin(\vartheta) - 2\cos^3(\vartheta), & \text{für} \quad \vartheta \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{3}$$

(I) [6 Punkte] Finden Sie die Lösung von Gleichung (3).

(II) [4 Punkte] Kann die Lösung u von Gleichung (3) ihr Minimum in einem Punkt $x \in B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ annehmen?

Hinweis: Sie dürfen die Identität

$$\cos^3(\varphi) = \frac{3\cos(\varphi) + \cos(3\varphi)}{4},$$

ohne Beweis verwenden.

Lösung:

(a) (i) Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ sehen wir, dass u eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems ist, wenn gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = 9\frac{X''(x)}{X(x)}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit folgt, dass T gegeben ist durch $T(t) = ce^{-\lambda t}$. Um die Funktion X zu bestimmen unterscheiden wir drei Fälle:

A) $\lambda > 0$: In diesem Fall ist die Lösung von $X''(x) = -\frac{\lambda}{9}X(x)$ gegeben durch

$$X(x) = a\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right).$$

Aufgrund der Randbedingung $u(0,t) = 0$ und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ folgt $a = 0$. Zusätzlich zeigt $u(3,t) = 0$, dass gilt $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ und somit $\sqrt{\lambda} = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$X(x) = b_n \sin\left(\frac{\pi n}{3}x\right), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

B) $\lambda = 0$: In diesem Fall hat X die Form $X(x) = ax+b$. Aufgrund der Randbedingungen $u(0,t) = u(3,t) = 0$ erhalten wir $X = 0$ und damit $u = 0$.

C) $\lambda < 0$: In diesem Fall ist X gegeben durch

$$X(x) = a\cosh(\tfrac{\sqrt{\lambda}}{3}x) + b\sinh(\tfrac{\sqrt{\lambda}}{3}x).$$

Da gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, impliziert $u(0,t) = 0$ die Bedingung $a = 0$. Andererseits folgt aus $u(3,t) = 0$ die Bedingung $b = 0$, weil der Sinus-Hyperbolicus nur für $x = 0$ verschwindet.

Also hat die allgemeine Lösung die Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{\pi n}{3} x) e^{-\pi^2 n^2 t},$$

wobei die Koeffizienten b_n gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\tfrac{\pi n}{L} x)\, dx.$$

Dies folgt aus der Identität

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin(\tfrac{\pi n}{L} x) \sin(\tfrac{\pi m}{L} x)\, dx = \delta_{n,m},$$

für n, $m \in \mathbb{N}$. Hier bezeichnet $\delta_{n,m}$ das Kronecker-Delta, welches definiert ist durch

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = m, \\ 0, & \text{wenn } n \neq m. \end{cases}$$

(ii) As der angegebenen Formel oder Koeffizientenvergleich folgt $b_n = 0$ für $n \neq 1$ und $b_1 = 5$. Also gilt

$$u(x,t) = 5 \sin(\tfrac{\pi x}{3}) e^{-\pi^2 t}.$$

(b) (I) Aus der Vorlesung (Gleichung 5.4) wissen wir, dass die allgemeine Lösung $u\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ der Laplace-Gleichung auf $B_1(0)$ mit Randwerten beschrieben durch eine Funktion $g \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n, \vartheta) + b_n \sin(n\vartheta))$ gegeben ist durch

$$u(r, \vartheta) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)).$$

Die Randfunktion lautet im gegebenen Fall

$$\sin(\vartheta) - 2\cos^3(\vartheta) = \sin(\vartheta) - \tfrac{3}{2}\cos(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\cos(3\vartheta),$$

wobei wir die Identität im Hinweis benutzt haben. Durch Koeffizientenvergleich folgt, dass die allgemeine Lösung

$$u(r, \vartheta) = r(\cos(\vartheta) - \tfrac{3}{2}\sin(\vartheta)) - \tfrac{1}{2} r^3 \cos(3\vartheta)$$

ist.

(II) Die in (I) konstruierte harmonische Funktion u erfüllt $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$, d.h. sie ist stetig auf der kompakten Menge $\overline{B_1(0)}$ und zweifach stetig differenzierbar in der zusammenhängenden Menge $B_1(0)$. Aus dem Minimumprinzip folgt, dass sie ihr Minimum auf dem Rand annimmt. Deshalb kann die in der Aufgabe beschriebene Situation nicht eintreten.

Bitte wenden!

4. Kompartiment-Modelle und lineare Differentialgleichungen [Total 10 Punkte] Lösen Sie Teilaufgabe (a) oder Teilaufgabe (b). Es wird jeweils nur eine Teilaufgabe bewertet.

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos(t) + \sin(2t)). \tag{4}$$

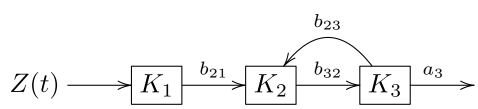
(i) [2 Punkte] Stellen Sie das zum homogenen Problem zugehörige DGL–System $Y'(t) = AY(t)$ auf.

(ii) [3 Punkte] Bestimmen Sie das zum homogenen Problem gehörende Fundamentalsystem.

(iii) [3 Punkte] Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(t) = e^{-t}(A\cos(t) + Bt\cos(2t))$ für geeignete $A, B \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (4).

(iv) [2 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (4).

(b) Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$:



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell werde beschrieben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t).$$

(i) [3 Punkte] Bestimmen Sie aus dem Kompartimentsystem die Matrix A und den Vektor $g(t)$.

(ii) [3 Punkte] Seien die Raten $a_3 = b_{23} = 1/6$, $b_{32} = b_{21} = 1/3$ und die Zufuhr konstant gleich 2. Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt und berechnen Sie diesen.

(iii) [4 Punkte] Seien die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$ und $a_3 = b_{23} = 1/6$, $b_{32} = b_{21} = 1/3$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Lösung:

(a) (i) Wir definieren $Y(t) = (y(t), y'(t))$ und sehen dass y die Gleichung

$$y'' + 2y' + 5 = 0 \tag{5}$$

genau dann löst, wenn Y die Gleichung

$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

erfüllt.

(ii) Das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

hat die komplex konjugierten Nullstellen $\lambda_+ = -1 + 2i$, $\lambda_- = -1 - 2i$. Wie nach Satz 2.15 im Vorlesungskript festgestellt, bilden die Funktionen $y_+(t) = e^{-t}\cos(2t)$ und $y_-(t) = e^{-t}\sin(2t)$ ein Fundamentalsystem von (5).

Siehe nächstes Blatt!

(iii) Wir berechnen zuerst y_p', y_p'':

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= -e^{-t}(A\cos(t) + Bt\cos(2t)) + e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&= -y_p(t) + e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
y_p''(t) &= -y_p'(t) - e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\cos(t) - 2B\sin(2t) - 2B\sin(2t) - 4Bt\cos(2t)) \\
&= -y_p'(t) - e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\cos(t) - 4B\sin(2t) - 4Bt\cos(2t))
\end{aligned}$$

Wir setzen nun y_p, y_p', y_p'' in Gleichung (4) ein und finden

$$\begin{aligned}
y_p'' + 2y_p' + 5y_p &= -y_p' - e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\cos(t) - 4B\sin(2t) - 4Bt\cos(2t)) + 2y_p' + 5y_p \\
&= -e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\cos(t) - 4B\sin(2t) - 4Bt\cos(2t)) \\
&\quad - y_p + e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) + 5y_p \\
&= -e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\cos(t) - 4B\sin(2t) - 4Bt\cos(2t)) \\
&\quad + e^{-t}(-A\sin(t) + B\cos(2t) - 2Bt\sin(2t)) \\
&\quad + 4e^{-t}(A\cos(t) + Bt\cos(2t)) \\
&= e^{-t}(3A\cos(t) - 4B\sin(2t)) \\
&\overset{!}{=} e^{-t}(\cos(t) + \sin(2t)).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$y_p(t) = e^{-t}(\tfrac{1}{3}\cos(t) - \tfrac{t}{4}\cos(2t))$$

eine partikuläre Lösung ist.

(iv) Aus den Teilaufgaben (ii) und (iii) folgt, dass die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$y(t) = e^{-t}(C\cos(2t) + D\sin(2t)) + e^{-t}(\tfrac{1}{3}\cos(t) - \tfrac{t}{4}\cos(2t))$$

für Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$.

(b) (i) Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -b_{21} & 0 & 0 \\ b_{21} & -b_{32} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & -(b_{23} + a_3) \end{pmatrix}$$

und die Zufuhr durch $g(t) = (Z(t), 0, 0)^\top$.

(ii) Für die gegebenen Raten hat die Matrix A die Form

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) = (2, 0, 0)^\top.$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Mit z.B. dem Gauss-Algorithmus findet man dass $Y_\infty = (6, 12, 12)^T$ ein stationärer Zustand ist. In der Tat gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 0 & -2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right) \overset{II \to II+I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -2 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{III \to III+II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -2 \\ 0 & 0 & -1/6 & -2 \end{array}\right) \overset{II \to II+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1/3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1/6 & -2 \end{array}\right).$$

Es folgt dass $Y_\infty = (6, 12, 12)^T$ ein stationärer Zustand ist.

(iii) In einem ersten Schritt diagonalisieren wir die Matrix A. Mit der Regel von Sarrus folgt, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} -(1/3+\lambda) & 0 & 0 \\ 1/3 & -(1/3+\lambda) & 1/6 \\ 0 & 1/3 & -(1/3+\lambda) \end{pmatrix} \\ &= -(1/3+\lambda)^3 - (1/3+\lambda)(1/3)(1/6) = -(1/3+\Lambda)(\lambda^2 + 2\lambda/3 + 1/18). \end{aligned}$$

Aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sehen wir, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch:

$$\lambda_1 = -1/3, \quad \lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{6}, \quad \lambda_3 = \frac{-2-\sqrt{2}}{6}.$$

Wir definieren die Diagonalmatrix $D = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Die zugehörigen Eigenvektoren erfüllen $(A - \lambda_i)v_i = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und somit sind sie

$$v_1 = (1, 0, -2)^\top, \quad v_2 = (0, 1, \sqrt{2})^\top, \quad v_3 = (0, 1, -\sqrt{2})^\top.$$

Die Transformationsmatrix ist somit

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Mit der Regel von Sarrus findet man $\det(T) = -2\sqrt{2}$ und somit folgt

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2 & -\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Setze nun $x(t) = T^{-1}y(t)$. Es gilt $y(t) = Tx(t)$, $y'(t) = Tx'(t)$ und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) &\implies Tx'(t) = A \cdot Tx(t) + g(t) \\ &\implies x'(t) = (T^{-1}AT) \cdot x(t) + T^{-1}g(t) = D \cdot x(t) + h(t), \end{aligned}$$

wobei $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(1, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^\top = e^{-t}k$.
Da D diagonal ist, sind die Differentialgleichungen entkoppelt. Diese haben die Form $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + k_i e^{-t}$, und können mittels Variation der Konstanten gelöst werden.
Ansatz: $x_i(t) = C_i(t)e^{\lambda_i t}$.

$$\begin{aligned} (C_i'(t) + \lambda_i C_i(t))e^{\lambda_i t} &= \lambda_i C_i(t)e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t} \\ C_i'(t)e^{\lambda_i t} &= k_i e^{-t} \\ C_i'(t) &= k_i e^{-(1+\lambda_i)t} \\ \Rightarrow \quad C_i(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-(1+\lambda_i)t} + const. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Hier haben wir benutzt, dass gilt $\lambda_i \neq -1$ für $i = 1, 2, 3$. Also

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_1(t)e^{\lambda_1 t} \\ C_2(t)e^{\lambda_2 t} \\ C_3(t)e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-t} + c_1 e^{-t/3} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} e^{-t} + c_2 e^{\frac{-2+\sqrt{2}}{6}t} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} e^{-t} + c_3 e^{-\frac{2+\sqrt{2}}{6}t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t/3} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{-2+\sqrt{2}}{6}t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{2+\sqrt{2}}{6}t}.$$

Alternativ kann $x(t)$ auch direkt durch Integration mittels der Variation der Konstanten Formel aus Aufgabe 2, Serie 5 bestimmt werden. Mit $y(t) = Tx(t)$ haben wir nun

$$y(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6/7 \\ 18/7 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/3} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{\frac{-2+\sqrt{2}}{6}t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-\frac{2+\sqrt{2}}{6}t}.$$