Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Fourierreihen **[10 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) **[2 Punkte]** Setzen Sie die Funktion f zu einer ungeraden Funktion auf $(-\pi, \pi]$ fort.

(b) **[2 Punkte]** Betrachten Sie die ungerade $2\pi-$periodische Fortsetzung $x \mapsto F(x)$ und skizzieren Sie den Graph für $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(c) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von F.

(d) Wir bezeichnen mit $D \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}$ in welchen die Fourierreihe von F punktweise gegen F konvergiert.

(i) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) **[1 Punkt]** Bestimmen Sie für alle $x \notin D$ den Grenzwert der Fourierreihe von F im Punkt x.

2. Laplace-Transformation **[10 Punkte]**

(a) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \cosh^2(t/3) + (t-2)^4\sigma(t-2),$$

wobei $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ und $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$, direkt aus der Definition der Laplace-Transformation.

(b) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+5)}.$$

(c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' + 5y' + 6y = \sigma(t-\pi)\cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(d) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Lösungen $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender Gleichung

$$\int_0^t x(s)x(t-s)\,ds = 3tx(t),$$

wobei $t \geq 0$.

3. Partielle Differentialgleichungen **[10 Punkte]**

Lösen Sie Teilaufgabe (a) oder Teilaufgabe (b). Es wird jeweils nur eine Teilaufgabe bewertet.

(a) Betrachten Sie das folgende Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \text{für} \quad x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, & \text{für} \quad t > 0, \\ u(x,0) = 5\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right), & \text{für} \quad x \in [0,3]. \end{cases} \tag{1}$$

(i) **[6 Punkte]** Finden Sie mithilfe der Methode der Separation der Variablen die allgemeine Lösung von (1).

(ii) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösung von Gleichung (1).

(b) Betrachten Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0, & \text{für} \quad r \in [0,1),\ \theta \in [0,2\pi), \\ u(1,\theta) = \sin(\theta) - 2\cos^3(\theta), & \text{für} \quad \theta \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{2}$$

(I) **[6 Punkte]** Finden Sie die Lösung von Gleichung (2).

(II) **[4 Punkte]** Kann die Lösung u von Gleichung (2) ihr Minimum in einem Punkt $x \in B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ annehmen?

Hinweis: Sie dürfen die Identität

$$\cos^3(\phi) = \frac{3\cos(\phi) + \cos(3\phi)}{4},$$

ohne Beweis verwenden.

4. Lineare Differentialgleichungen und Kompartiment-Modelle **[10 Punkte]**

Lösen Sie Teilaufgabe (a) <u>oder</u> Teilaufgabe (b). Es wird jeweils nur eine Teilaufgabe bewertet.

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos(t) + \sin(2t)). \tag{3}$$

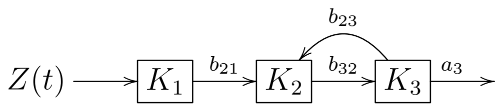
(i) **[2 Punkte]** Stellen Sie das zum homogenen Problem zugehörige DGL–System $Y'(t) = AY(t)$ auf.

(ii) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie das zum homogenen Problem gehörende Fundamentalsystem.

(iii) **[3 Punkte]** Finden Sie mit dem Ansatz $y_p(t) = e^{-t}(A\cos(t) + Bt\cos(2t))$ für geeignete $A, B \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (3).

(iv) **[2 Punkte]** Finden Sie die allgemeine Lösung von (3).

(b) Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$:



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell werde beschrieben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t).$$

(i) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie aus dem Kompartimentsystem die Matrix A und den Vektor $g(t)$.

(ii) **[3 Punkte]** Seien die Raten $a_3 = b_{23} = 1/6$, $b_{32} = b_{21} = 1/3$ und die Zufuhr konstant gleich 2. Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt und berechnen Sie diesen.

(iii) **[4 Punkte]** Seien die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$ und $a_3 = b_{23} = 1/6$, $b_{32} = b_{21} = 1/3$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.