Prof. Dr. E. W Farkas **ETH Zürich, Januar 2014**

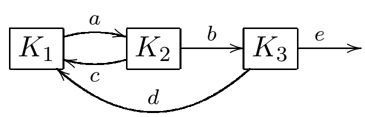
D-HEST, Lehrdiplom D-MATH

Lösungen zur Prüfung Mathematik III

---

1. (*12 Punkte*)

a) (*2 Punkte*)



b) (*2 Punkte*) Für eine stationäre Lösungsfunktion y_∞ gilt $y'_\infty = 0$,

$$0 \stackrel{!}{=} y'_\infty(t) = A \cdot y_\infty.$$

Das heisst, es gibt einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems genau dann, wenn das homogene LGS $A \cdot y_\infty = 0$ eine nichttriviale Lösung hat, also genau dann, wenn $\det(A) = 0$. Falls $e = 0$, gilt

$$\det(A) = -a(b+c)d + abd - ac(-d) = 0$$

für alle a, b, c, d, und somit existiert ein nichttrivialer stationärer Zustand.
Bemerkung: Das heisst auch, dass $\lambda = 0$ immer einer der Eigenwerte von A ist, und der zugehörige Eigenvektor einer stationären Lösungsfunktion entspricht.

c) (*5 Punkte*) Die charakteristische Gleichung $\det(B - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt die Eigenwerte:

$$\det(B - \lambda I) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_1 = -\frac{1}{3}.$$

Nun lösen wir $B \cdot v_i = \lambda_i v_i$ um die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}: \quad B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{3}b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3}: \quad B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{3}b \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also mit $P = (v_1, v_2)$ erhalten wir

$$B = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und somit

$$\mathrm{e}^{Bt} = P \cdot \mathrm{e}^{Dt} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist folglich

$$x(t) = \mathrm{e}^{Bt} \cdot x(0) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix} \quad \left(= 2\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \cdot v_2\right).$$

d) (*3 Punkte*) Mit der Substitution $z(t) = P^{-1} \cdot x(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P \cdot z'(t) &= BP \cdot z(t) + f(t) \\ P \cdot z'(t) &= PDP^{-1}P \cdot z(t) + f(t) \\ P \cdot z'(t) &= PD \cdot z(t) + f(t) \\ z'(t) &= D \cdot z(t) + P^{-1} \cdot f(t) \end{aligned}$$

Das heisst,

$$\begin{cases} z_1'(t) = -\frac{1}{2} z_1(t) \\ z_2'(t) = -\frac{1}{3} z_2(t) + t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \\ z_2(t) = A_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} + at + b \end{cases}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \\ z_2(t) = A_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{cases}$$

Rücksubstitution:

$$x(t) = P \cdot z(t) = \begin{pmatrix} A_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - A_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} - 3t + 9 \\ A_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{pmatrix}$$

Anfangswert einsetzen ergibt die Konstanten:

$$x(0) = \begin{pmatrix} A_1 - A_2 + 9 \\ A_2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = 2, A_2 = 10$$

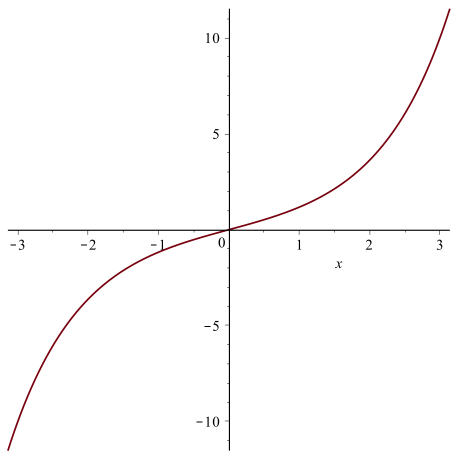
$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} - 3t + 9 \\ 10\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{pmatrix}.$$

2. (*12 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -f(x),$$

also ist f ungerade. (Oder: mittels einer Skizze können wir sagen, dass f ungerade ist) Dann gilt $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.



b) (*4 Punkte*) Weil f ungerade ist,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh x \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sinh x \cos nx|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \cosh x dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(-1)^n}{n} \sinh \pi + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos nx \cosh x dx - \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \sinh x \sinh x dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(-1)^n}{n} \sinh \pi - \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \sinh x \sinh x dx \right] \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sinh \pi - \frac{1}{n^2} b_n.
\end{aligned}$$

Das heisst,

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2+1)\pi} \sinh \pi.$$

Also gilt

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2+1)\pi} \sinh \pi \sin nx.$$

c) (*2 Punkte*) Für die komplexen Koeffizienten c_n gilt

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0, \end{cases}$$

wobei a_n, b_n die Koeffizienten der Fourier-Reihe in reeller Form sind. Sei g ungerade, also $a_n = 0$, für alle $n \geq 0$. Demnach ist $c_0 = 0$. Alle anderen c_n sind nicht notwendigerweise null, ein Gegenbeispiel ist durch die Fourierreihe zu f aus Aufgabenteil b) gegeben.

d) (*4 Punkte*) Bekanntlich lautet die allgmemeine Lösung $y = y_h + y_p$, wobei y_h die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y''+3y = 0$ ist und y_p irgendeine Lösung des inhomogenen Problems ist. Die Nullstellen von $z^2 + 3 = 0$ sind $z_1 = \sqrt{3}i$ und $z_2 = -\sqrt{3}i$, demnach ist die allgemeine Lösung von $y'' + 3y = 0$

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{3}ix} + C_2 e^{-\sqrt{3}ix} = C_1' \sin\sqrt{3}x + C_2' \cos\sqrt{3}x,$$

wobei C_1, C_2, C_1' und C_2' beliebige reelle Konstanten sind. Mit dem Ansatz $y_p = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_n \sin nx$ lautet die 2. Abteilung von y_p

$$y_p'' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \widetilde{b}_n \sin nx.$$

Rücksubstitution in $y_p''(x) + 3y_p(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, und Koeffizientenvergleich ergeben

$$\begin{aligned} -\widetilde{b}_1 + 3\widetilde{b}_1 &= \frac{3}{4} \\ -9\widetilde{b}_3 + 3\widetilde{b}_3 &= -\frac{1}{4} \\ -n^2\widetilde{b}_n + 3\widetilde{b}_n &= 0 \qquad n \neq 1, 3. \end{aligned}$$

Also ist $y_p = \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{24}\sin 3x$ eine partikuläre Lösung, und die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{24}\sin 3x + C_1 e^{\sqrt{3}ix} + C_2 e^{-\sqrt{3}ix} \\ &= \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{24}\sin 3x + C_1' \sin\sqrt{3}x + C_2' \cos\sqrt{3}x, \end{aligned}$$

wobei C_1, C_2, C_1' und C_2' beliebige (reelle) Konstanten sind.

3. (*12 Punkte*)

a) i) (*2 Punkte*) Es gilt

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty te^{-(s-\alpha)t}dt = t\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s-\alpha}\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{1}{(s-\alpha)^2},$$

(wobei streng genommen der Definitionsbereich $\Re(s) > \alpha$ ist).

ii) (*1 Punkt*) Aus i) und mit dem Ableitungssatz gilt

$$\frac{s}{(s-\alpha)^2} = s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{f'\}(s) + f(0) = \mathcal{L}\{f'\}(s). \tag{1}$$

Also ist $f'(t) = (1+\alpha t)e^{\alpha t}$ die Originalfunktion zu $s/(s-\alpha)^2$.

b) (*2 Punkte*) Mittels geeigneter Transformationssätze erhält man nacheinander

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g\}(s) &= 5e^{-4s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(2t)^3\}(s+3) \\
&= 5e^{-4s}\frac{s}{s^2+1} + 8\mathcal{L}\{t^3\}(s+3) \\
&= 5e^{-4s}\frac{s}{s^2+1} + 8\frac{3!}{(s+3)^4}.
\end{aligned}$$

c) (*3 Punkte*) Gemäss Faltungssatz und mit doppelter partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t \cos(u)e^{a(t-u)}du \\
&= \sin(u)e^{a(t-u)}\Big|_0^t + a\int_0^t \sin(u)e^{a(t-u)}du \\
&= \sin(t) + \Big[a(-\cos(u))e^{a(t-u)}\Big]_0^t - a^2\int_0^t \cos(u)e^{a(t-u)}du \\
&= \sin(t) - a\cos(t) + ae^{at} - a^2h(t),
\end{aligned}$$

und Auflösen nach $h(t)$ ergibt

$$h(t) = \frac{1}{1+a^2}(\sin(t) - a\cos(t) + ae^{at}).$$

d) i) (*2 Punkte*) Mit dem Ableitungssatz (für die zweite Ableitung) gilt

$$\begin{aligned}
s^2F_1(s) + \beta(F_1(s) - F_2(s)) &= sA \\
s^2F_2(s) - \beta(F_1(s) - F_2(s)) &= 0.
\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in F_1, F_2, und es gilt

$$\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} sA \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} s^2+\beta & -\beta \\ -\beta & s^2+\beta \end{pmatrix}.$$

Aus $\det(M) = (s^2+\beta)^2 - \beta^2$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} &= \frac{1}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} \begin{pmatrix} s^2+\beta & \beta \\ \beta & s^2+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sA \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} \begin{pmatrix} (s^2+\beta)sA \\ \beta sA \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) (*2 Punkte*) Aus i) wissen wir, dass

$$F_1(s) = \frac{(s^2+\beta)sA}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} = \frac{A(s^2+\beta)}{(s^2+2\beta)s}.$$

Die gesuchte Funktion ϕ_1 ist die Originalfunktion zu F_1. Wir bestimmen sie mittels Partialbruchzerlegung. Der übliche Ansatz

$$\frac{A(s^2+\beta)}{(s^2+2\beta)s} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+2\beta}$$

liefert nach Multiplikation mit $(s^2+2\beta)s$

$$A(s^2+\beta) = B(s^2+2\beta) + (Cs+D)s = 2\beta B + Ds + (B+C)s^2,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt $B = A/2$, $D = 0$ und $C = A - B = A/2$. Insgesamt gilt also

$$F_1(s) = \frac{A}{2}\Big(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2\beta}\Big),$$

und damit

$$\phi_1(t) = \frac{A}{2}(1+\cos(\sqrt{2\beta}t).$$