Aufgaben

1. (*12 Punkte*)

Im Folgenden seien a, b, c, d, e reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und } A = \begin{pmatrix} -a & c & d \\ a & -(b+c) & 0 \\ 0 & b & -(d+e) \end{pmatrix}.$$

Das lineare DGL-System $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3, wobei $y_i(t)$ die Entwicklung in K_i sei, für $i = 1, 2, 3$.

$$\boxed{K_1} \qquad\qquad \boxed{K_2} \qquad\qquad \boxed{K_3}$$

a) Zeichnen Sie die Pfeile in das Kompartimentsystem und beschriften sie diese mit a, b, c, d, e. Achten Sie dabei auf die Pfeilrichtung!

b) Zeigen Sie, falls $e = 0$, dass es für jede Wahl von a, b, c, d einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems $y'(t) = A \cdot y(t),\ t \geq 0$ gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $t \mapsto y^\infty(t)$, welche nicht von t abhängt.

Wir betrachten nun das DGL-System

$$x'(t) = B \cdot x(t) + f(t), \quad \text{wobei } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ mit Anfangswert } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für verschiedene Wahlen von f.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B. Berechnen Sie daraus e^{Bt}, und somit die Lösung $x(t)$ falls $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Sei nun $f(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Substitution $z(t) = P^{-1} \cdot x(t)$ für eine geeignete Matrix P, um die Differentialgleichungen zu entkoppeln und separat zu lösen. Bestimmen Sie dann die Lösung $x(t)$ durch Rücksubstitution.

Bitte wenden!

2. (*12 Punkte*)

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

Weiterhin sei

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

die Fourier-Reihe zur Funktion, die aus f durch 2π-periodische Fortsetzung entsteht.

a) Zeigen Sie, dass f ungerade ist. Was können Sie hieraus über die Koeffizienten a_n, $n \geq 0$, und b_n, $n \geq 1$ von F folgern?

b) Bestimmen Sie $F(x)$.

c) Sei $g(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, eine *beliebige* stetige, ungerade Funktion, und

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad x \in (-\pi, \pi),$$

die zugehörige Fourier-Reihe in komplexer Form. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ *muss* $c_n = 0$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort. *Hinweis:* Verwenden Sie a) und b).

Gegeben sei folgende inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + 3y(x) = \sin^3 x. \tag{1}$$

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ von (1). Verwenden Sie hierzu den Ansatz

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b}_n \sin nx,$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\widetilde{b}_n \in \mathbb{R}$, um eine partikuläre Lösung von (1) zu finden. *Hinweis:* es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

Siehe nächstes Blatt!

3. (*12 Punkte*)

Notation: im Folgenden bezeichne

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{2}$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) In dieser Teilaufgabe sei $f(t) = te^{\alpha t}$ mit $\alpha > 0$.

i) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f\}(s)$ direkt aus der Definition (2).

ii) Bestimmen Sie mithilfe von i) und dem Ableitungssatz die Originalfunktion zu

$$\frac{s}{(s-\alpha)^2}.$$

b) Sei

$$g(t) = 5\cos(t-4)\sigma(t-4) + e^{-3t}(2t)^3,$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$. Wie lautet $\mathcal{L}\{g\}(s)$?

c) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu

$$\frac{s}{(s^2+1)(s-a)}, \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

d) Für gegebene $A \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ seien die Funktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \phi_1'' + \beta(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \\ \phi_2'' - \beta(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

zur Anfangsbedingung $\phi_1(0) = A$, $\phi_2(0) = 0$ und $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = 0$, wobei $\phi_i'(t) = d\phi_i(t)/dt$ die Ableitung nach t bezeichnet.

i) Seien $F_i(s) = \mathcal{L}\{\phi_i\}(s)$ für $i = 1, 2$. Bestimmen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von s, A und β.

ii) Bestimmen Sie durch Rücktransformation aus i) die Funktion $\phi_1(t)$.
Hinweis: machen Sie eine Partialbruchzerlegung.