D-HEST

Lösungen zur Prüfung Mathematik III, Winter 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

Bitte wenden!

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

$$f(t) = \sigma(t-1)\cos(t-1) + e^t$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$.

Lösung:
Die Laplace-Transformation von $\cos(t)$ lautet $\frac{s}{s^2+1}$. Da die Funktion um 1 nach rechts verschoben wird, kommt ein Faktor e^{-s} hinzu. Die Laplace-Transformation von e^t lautet $\frac{1}{s-1}$. Wegen der Linearität der Laplace-Transformation erhalten wir also:

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{\sigma(t-1)\cos(t-1)\} + \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{e^{-s}s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}.$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{1}{s(s-a)^2}, \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R},$$

das heisst, bestimmen Sie die Funktion $h(t)$ mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s(s-a)^2}$.

Lösung:
Die Originalfunktionen zu $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{(s-a)^2}$ lauten 1 und te^{at}. Es gilt also:

$$h(t) = 1 * te^{at} = \int_0^t ue^{au} du = u\frac{1}{a}e^{au}|_0^t - \int_0^t \frac{1}{a}e^{au} = \frac{te^{at}}{a} - \frac{1}{a^2}e^{au}|_0^t = \frac{te^{at}}{a} - \frac{e^{at}-1}{a^2}.$$

c) Für gegebene $A, B \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2(t) \\ x_2' &= -x_1(t) \end{aligned}$$

zu den Anfangsbedingungen $x_1(0) = A$, $x_2(0) = B$, wobei $x_i'(t) = dx_i(t)/dt$ für $i = 1, 2$ die Ableitung nach t bezeichnet.

Siehe nächstes Blatt!

- Seien $F_i = \mathcal{L}\{x_i\}$ für $i = 1, 2$. Bestimmen Sie F_1 in Abhängigkeit von s, A und B.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $x_1(t)$.
  Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Lösung:
Durch Laplace-Transformation und benützen des Ableitungssatzes erhalten wir:

$$\begin{aligned} sF_1 - A &= -F_2 \\ sF_2 - B &= -F_1. \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach F_2 und einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$sF_1 - A = \frac{F_1 - B}{s}.$$

Auflösen nach F_1 ergibt:

$$F_1 = \frac{sA - B}{s^2 - 1}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind 1 und -1. Wir machen daher den Ansatz:

$$F_1 = \frac{sA - B}{s^2 - 1} = \frac{C}{s - 1} + \frac{D}{s + 1}$$

für die Partialbruchzerlegung. Durch Multiplikation mit $s^2 - 1$ erhalten wir:

$$sA - B = C(s + 1) + D(s - 1).$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} A &= C + D \\ -B &= C - D. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$C = \frac{A - B}{2} \quad \text{und} \quad D = \frac{A + B}{2}.$$

Die Rücktransformationen von $\frac{1}{s-1}$ und $\frac{1}{s+1}$ sind e^t und e^{-t}. Die Lösung lautet also:

$$x_1(t) = \frac{A - B}{2} e^t + \frac{A + B}{2} e^{-t}.$$

Bitte wenden!

2. Fourier Reihen

Die Funktion $g(x)$ auf dem Intervall $x \in [-1, 1[$ sei gegeben als:

$$g(x) := \begin{cases} 2x + x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

und die Funktion $h(x)$ auf dem selben Intervall als:

$$h(x) := \begin{cases} -2x - x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1\,. \end{cases}$$

Weiter ist die reelle Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion g ungerade und die Funktion h gerade ist.

Lösung:
(4 Punkte: 2 pro Funktion)
Damit die Funktion g ungerade ist, muss $g(-x) = -g(x)$ gelten. Sei $0 < a \leq 1$, dann ist:

$$\begin{aligned} g(-a) &= -2a + a^2 \\ -g(a) &= -2a + a^2 \end{aligned}$$

und für $-1 \leq a < 0$ ist ebenso:

$$\begin{aligned} g(-a) &= -2a + a^2 \\ -g(a) &= -2a + a^2\,. \end{aligned}$$

Die Funktion h sei gerade, es muss also $h(-x) = h(x)$ gelten. Sei $0 < a \leq 1$, dann ist:

$$\begin{aligned} h(-a) &= 2a - a^2 \\ h(a) &= 2a - a^2 \end{aligned}$$

und für $-1 \leq a < 0$ ist:

$$\begin{aligned} h(-a) &= -2a - a^2 \\ h(a) &= -2a - a^2\,. \end{aligned}$$

b) Was können Sie jeweils über die Koeffizienten a_n, b_n der reellen Fourier-Reihen einer geraden beziehungsweise ungeraden Funktion aussagen?

Lösung:
(2 Punkte: 1 pro Funktion)
Die Funktion g ist ungerade, die Reihe enthält nur ungerade Reihenglieder, also gilt $a_0 = 0$, $a_n = 0$ und $b_n \neq 0$. Die Funktion h ist gerade, die Reihe enthält nur gerade Reihenglieder, also gilt genau umgekehrt $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ und $b_n = 0$.

c) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihen beider Funktionen.

Lösung:
(6 Punkte: 2 pro b_n^g, a_0^h, a_n^h)
Die Periode beider Funktionen ist gleich der Intervalllänge, also $T = 2$ und somit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Für g berechnen wir nur:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} g(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{1} g(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} (2x - x^2)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{0}^{1} x\sin(n\omega x)\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} x^2\sin(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2(-1)^n\left(\pi^2 n^2 - 2\right) + 4}{\pi^3 n^3} \\
&= \frac{4 - 2(-1)^n\left(\pi^2 n^2 + 2\right)}{\pi^3 n^3}.
\end{aligned}
$$

Für h berechnen wir a_0:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} h(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{1} h(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} x^2 - 2x\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x \\
&= 2 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

und a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} h(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{1} h(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} (2x-x^2)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{0}^{1} x\cos(n\omega x)\mathrm{d}x - 2\int_{0}^{1} x^2\cos(n\omega x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2} \\
&= -\frac{4}{\pi^2 n^2}\,.
\end{aligned}$$

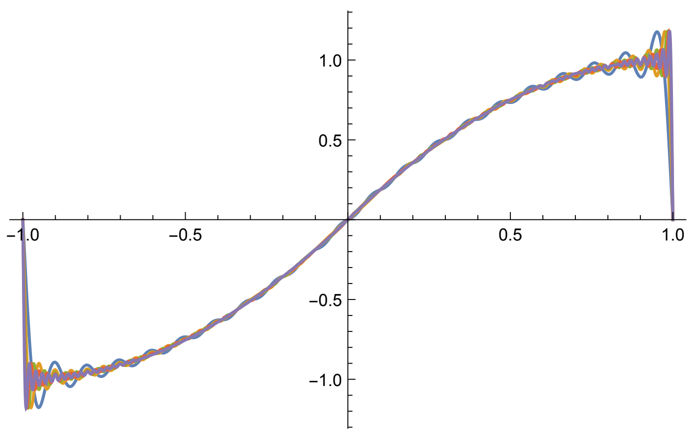


Abbildung 1: Näherungen mit $n = 20, 40, 60, 80, 100$ Reihengliedern.

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ schreibt sich:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega x}$$

mit $c_n \in \mathbb{C}$.

d) Bestimmen Sie im Folgenden die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihen von g und h.

Siehe nächstes Blatt!

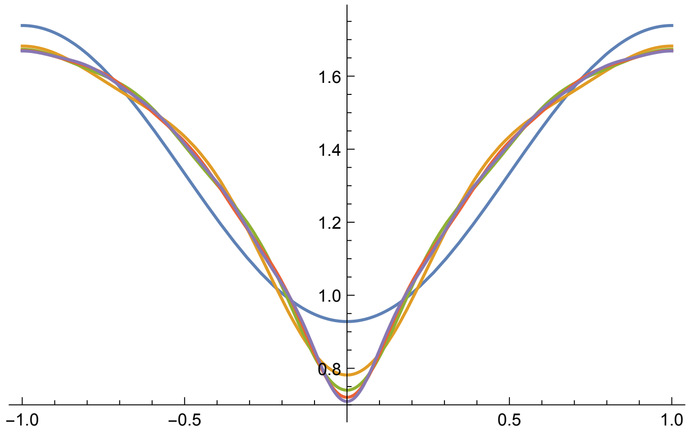


Abbildung 2: Näherungen mit $n = 2, 4, 6, 8, 10$ Reihengliedern.

Lösung:
(3 Punkte: 1/2 pro c_{-n}, c_0, c_n je Funktion)
Die Umrechnungsregeln sind:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \ . \end{aligned}$$

Für die Funktion g finden wir:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_n &= -\frac{i}{2} b_n = \frac{i(-1)^n (\pi^2 n^2 + 2) - 2i}{\pi^3 n^3} \\ c_{-n} &= \frac{i}{2} b_n = \frac{-i(-1)^n (\pi^2 n^2 + 2) + 2i}{\pi^3 n^3} \end{aligned}$$

und für die Funktion h ergibt sich:

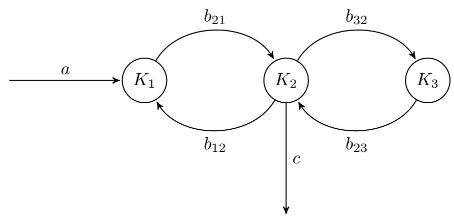
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{3} \\ c_n &= \frac{1}{2} a_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2} \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} a_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2} \ . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von g sind rein imaginär und die Koeffizienten von h rein reell.

Bitte wenden!

3. Kompartiment-Modell

Gegeben seien die drei Teile K_1, K_2 und K_3, welche zu einem Kompartiment-Modell gehören:



Die Substanz in den einzelnen Teilen wird über die Zeit durch die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Differentialgleichungen für die drei Funktionen y_1, y_2 und y_3 auf.

Lösung:
(2 Punkte)
Die drei gekoppelten Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -b_{21}y_1(t) + b_{12}y_2(t) + a \\ y_2'(t) &= b_{21}y_1(t) - (b_{12} + b_{32} + c)y_2(t) + b_{23}y_3(t) \\ y_3'(t) &= b_{32}y_2(t) - b_{23}y_3(t) \end{aligned}$$

für $t \geq 0$.

b) Das System lässt sich in Matrixform $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{g}$ schreiben. Finden Sie die 3×3 Matrix $\mathbf{A}$ sowie den Vektor $\underline{g}$. Es sei $\underline{y} := [y_1, y_2, y_3]^T$.

Lösung:
(2 Punkte)
Das Differentialgleichungssystem ist:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{21} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & -(b_{12} + b_{32} + c) & b_{23} \\ 0 & b_{32} & -b_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

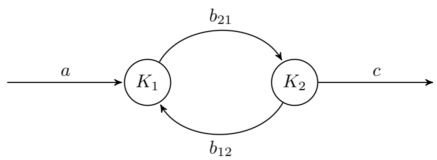
für $t \geq 0$.

Die Parameter haben folgende Werte: $b_{21} = 2$, $b_{12} = 2$, mit Zufluss $a = 3$ und Abfluss $c = 3$. Wir betrachten nun den Fall $b_{32} = 0$ und $b_{23} = 0$ wobei sich das Modell vereinfachen lässt.

Siehe nächstes Blatt!

c) Zeichnen Sie das simplere Kompartiment-Modell und beschriften Sie die Pfeile. Achten Sie auch auf die korrekte Pfeilrichtung. Formulieren Sie anschliessend das System von zwei Differentialgleichungen $\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$, welches dieses Modell beschreibt. $\mathbf{C}$ ist eine 2×2 Matrix und $\underline{z} := [z_1, z_2]^T$.

Lösung:
(3 Punkte: 1 Zeichnung, 2 Gleichungssystem)
Das vereinfachte Modell hat folgende Gestalt und die zugehörigen Differential-



gleichungen lauten:

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{21} & b_{12} \\ b_{21} & -(b_{12}+c) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mit den konkreten Werten ergibt sich daraus:

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

d) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Matrix $\mathbf{C}$.

Lösung:
(4 Punkte: 2 für Eigenwerte, 2 für Eigenvektoren)
Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = -6$$
$$\lambda_2 = -1$$

und die Eigenvektoren sind:

$$\underline{\nu_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\underline{\nu_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

e) Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(t)$ des Differentialgleichungssystems für $t \geq 0$ zum Anfangswert $\underline{z}(0) = [0, 0]^T$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix $\mathbf{C}$ um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

Bitte wenden!

Lösung:
(4 Punkte)
Es seien:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\nu_1} & \underline{\nu_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

und:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und die Diagonalisierung ist dann $\mathbf{C} = \mathbf{P\Lambda P}^{-1}$. Wir entkoppeln damit das System:

$$\begin{aligned} \underline{z}' &= \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h} \\ \underline{z}' &= \mathbf{P\Lambda P}^{-1}\underline{z} + \underline{h} \\ \mathbf{P}^{-1}\underline{z}' &= \mathbf{\Lambda P}^{-1}\underline{z} + \mathbf{P}^{-1}\underline{h} \\ \underline{u}' &= \mathbf{\Lambda}\underline{u} + \underline{\tilde{h}} \end{aligned}$$

wobei $\underline{u} = \mathbf{P}^{-1}\underline{z}$ und erhalten zwei skalare Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u_1' &= \lambda_1 u_1 + \tilde{h}_1 \\ u_2' &= \lambda_2 u_2 + \tilde{h}_2 \,. \end{aligned}$$

Die Lösungen davon sind:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-6t}}{10} - \frac{1}{10} \\ \frac{6}{5} - \frac{6e^{-t}}{5} \end{pmatrix}$$

und wir bekommen mit $\underline{z} = \mathbf{P}\underline{u}$ die Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -\frac{e^{-6t}}{10} - \frac{12e^{-t}}{5} + \frac{5}{2} \\ z_2(t) &= \frac{e^{-6t}}{5} - \frac{6e^{-t}}{5} + 1 \,. \end{aligned}$$

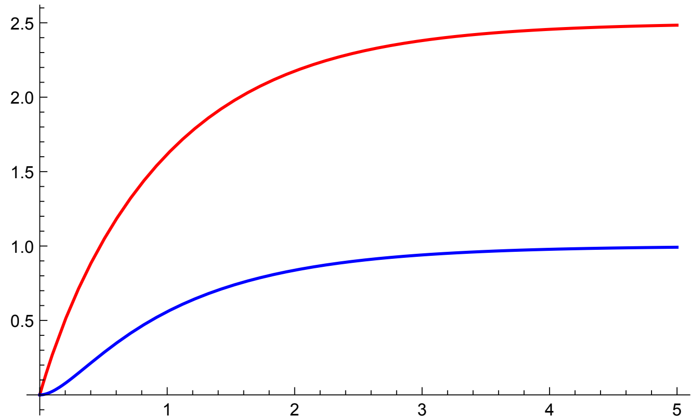


Abbildung 3: Lösungen $z_1(t)$ (rot) und $z_2(t)$ (blau).

4. Partielle Differentialgleichung

Wir betrachten einen offenen Draht mit Temperaturleitungsfähigkeit $D > 0$ und Länge 1 und suchen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für alle } 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{1}$$

zu den Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \qquad \text{für alle } t > 0. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ der Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

Lösung:
Aus der Vorlesung folgt, dass Basislösungen von der Form:

$$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{-D\omega^2 t}$$

sind. Die Ableitung nach x ist:

$$\omega(-A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x))e^{-D\omega^2 t}.$$

Wegen der Randbedingung (2) gilt $B = 0$ und $\omega = n\pi$ für ein $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Die Lösungen lauten also:

$$A\cos(n\pi x)e^{-D(n\pi)^2 t}.$$

Bitte wenden!

b) Die Temperatur zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch $u(x, 0) = x$ für alle $0 \leq x \leq 1$. Bestimmen Sie für diese Anfangswerte durch Superposition der gefundenen Lösungen aus a) die Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

Lösung:
Wir verwenden den Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) e^{-D(n\pi)^2 t}. \tag{3}$$

Die Koeffizienten A_n bestimmen wir so, dass die Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ erfüllt ist. Für $t = 0$ ist (3) die Fourierreihe einer geraden Funktion. Wir betrachten daher die gerade 2-periodische Fortsetzung $\bar{u}_0$ von $u_0(x) = x$ für alle $0 < x < 1$. Da $\bar{u}_0$ und $\cos(n\pi x)$ gerade sind, gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$A_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \bar{u}_0(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx.$$

Mittels partieller Integration folgt:

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \left(x \sin(n\pi x)|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right) = \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x)|_0^1 = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{(n\pi)^2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zudem ist $A_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$. Die Lösung lautet also:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) e^{-D(n\pi)^2 t}.$$

c) Zeigen Sie: $\int_0^1 u(x, t) dx$ ist konstant für alle $t \geq 0$, das heisst, die Wärme im Draht bleibt zeitlich konstant.

Lösung:
Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u dx = \int_0^1 u_t dx = \int_0^1 D u_{xx} dx = D u_x|_0^1 = 0.$$