D-HEST

Lösungen zur Prüfung Mathematik III, Winter 2018

Prof. Dr. E. W. Farkas

Bitte wenden!

1. Laplace-Transformation *(10 Punkte)*

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \le Ce^{\alpha t}$ für $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $Re\ s > \alpha_f$, wobei $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \le Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

a) Die Funktion f sei gegeben durch $f(t) = 3\sin(t-2)\sigma(t-2) + e^{-7t}$, wobei $\sigma(u) = \begin{cases} 1, & u \ge 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$ Berechnen Sie $\mathcal{L}[f](s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re\ s > 0$. *(3 Punkte)*

Zuerst verwenden wir die Linearität der Laplace-Transformation, dann den Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto 3\sin(t-2)\sigma(t-2)](s) + \mathcal{L}[t \mapsto \exp(-7t)](s) \\ &= \underbrace{3e^{-2s}\mathcal{L}[\sin](s)}_{\textit{(1 Punkt)}} + \underbrace{\frac{1}{s+7}}_{\textit{(1 Punkt)}} \\ &= \underbrace{\frac{3e^{-2s}}{1+s^2}}_{\textit{(1 Punkt)}} + \frac{1}{s+7}. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie allgemein, dass für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re\ s > \max\{\alpha_g, \alpha_{g'}\}$ gilt:

$$\mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0),$$

falls g, g' beide die oben genannten Bedingungen erfüllen. *(2 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g'](s) &= \int_0^\infty e^{-st} g'(t) dt \\ &= \left[e^{-st} g(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \qquad \textit{(1 Punkt)} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{g(T)}{e^{sT}} + s\mathcal{L}[g](s) - g(0) \\ &= s\mathcal{L}[g](s) - g(0) \qquad \textit{(1 Punkt)}, \end{aligned}$$

da $|g(T)| \le Ce^{\alpha T}$ für ein $\alpha \in (\alpha_g, Re\ s)$ und $Re\ s > \alpha_g$.

Hinweis: Die genaue Begründung ist nicht erforderlich. Es reicht für die volle Punktzahl, zu schreiben, dass $\lim_{T\to\infty} \frac{g(T)}{e^{sT}} = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

Betrachten Sie nun das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y(t) = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass für die Laplace-Transformierte von y gilt:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Finden Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$. *(3 Punkte)*

Wir Laplace-tranformieren die Differentialgleichung:

$$\mathcal{L}[y'' + y](s) = \mathcal{L}[1](s) \underbrace{= \frac{1}{s}}_{\textit{(1/2 Punkt)}}$$

$$\mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s}$$

$$\overset{\text{Ableitungssatz}}{\Rightarrow} \quad s\mathcal{L}[y'](s) - \underbrace{y'(0)}_{=0} + \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s}$$

$$\overset{\text{Ableitungssatz}}{\Rightarrow} \quad s(s\mathcal{L}[y](s) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s} \qquad \textit{(1/2 Punkt)}$$

$$(1+s^2)\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s(s^2+1)}. \qquad \textit{(1/2 Punkt)}$$

Eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs}{1+s^2} + \frac{C}{1+s^2}$ liefert:

$A = 1$ *(1/2 Punkt)* $\quad B = -1$ *(1/2 Punkt)* $\quad C = 0$ *(1/2 Punkt)*.

d) Finden Sie $y(t)$ durch Rücktransformation. *(2 Punkte)*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[s \mapsto \frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2}\right](t)$$
$$= \underbrace{1}_{\textit{(1 Punkt)}} - \underbrace{\cos(t)}_{\textit{(1 Punkt)}}.$$

Alternative Lösung: Mit dem Faltungssatz gilt wegen $\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \mathcal{L}[f_1](s)\mathcal{L}[f_2](s)$, wobei $f_1(t) = 1$ und $f_2(t) = \sin(t)$:

$$y(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t \sin(u)du = [-\cos(u)]_0^t = 1 - \cos(t). \qquad \textit{(2 Punkte)}$$

*Hinweis: Auch wenn die Lösung von **d)** mit dem Faltungssatz bestimmt wurde, müssen in **c)** A, B, C bestimmt werden, um die volle Punktzahl zu erhalten.*

Bitte wenden!

2. Fourierreihen *(10 Punkte)*

Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ auf $[-\pi, \pi[$, 2π-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f, es gilt also:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion f. *(3 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie von f.

Die Funktion f ist gerade, also gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *(1 Punkt)*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |t| \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\pi} = 0 \qquad \textit{(1 Punkt)}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |t| \right) \cos(nt) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos(nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \cos(nt) dt \\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n} \underbrace{[t \sin(nt)]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \\
&= -\frac{2}{n^2 \pi} [\cos(nt)]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2 \pi}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \textit{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

b) Benutzen Sie die Fourierreihe von f, um zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(2 Punkte)

f ist gerade und stetig auf $[-\pi, \pi[$, also auch stetig auf $\mathbb{R}$ und wird deshalb überall durch ihre Fourierreihe dargestellt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{n^2\pi} \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{=1} && \textit{(1 Punkt)} \\
&= \frac{\pi}{4} f(0) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |0|\right) = \frac{\pi^2}{8}. && \textit{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator mit der obigen Funktion f als äußerer Kraftwirkung:

$$x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = f(t), \tag{1}$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung und zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} x_h(t) = 0$. *(2 Punkte)*

Mit dem Ansatz $x \sim e^{\lambda t}$ erhält man

$$(\lambda^2 + 6\lambda + 25)e^{\lambda t} = 0,$$

also ergibt sich: $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm 4i$. Somit:

$$x_h(t) = Ae^{-3t}\cos(4t) + Be^{-3t}\sin(4t) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Da $|\sin(4t)| \leq 1$ und $|\cos(4t)| \leq 1$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} |x_h(t)| \leq \lim_{t\to\infty} (|A|e^{-3t} + |B|e^{-3t}) = 0. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

d) Bestimmen Sie nun eine spezielle Lösung von (1). *(3 Punkte)*

Hinweis: Finden Sie für $n \geq 1$ jeweils eine Lösung x_n von

$$x_n''(t) + 6x_n'(t) + 25x_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt).$$

Dann ist $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ eine Lösung von (1). Wir wollen die Differentialgleichungen

$$x_n''(t) + 6x_n'(t) + 25x_n(t) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2\pi}\cos(nt), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bitte wenden!

für jedes $n \geq 1$ lösen. Wir lösen zunächst

$$\widetilde{x_n}''(t) + 6\widetilde{x_n}'(t) + 25\widetilde{x_n}(t) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2\pi} e^{int}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und bilden anschließend $x_n(t) = Re\ \widetilde{x_n}(t)$ Mit dem Ansatz $\widetilde{x_n}(t) = A_n e^{int}$ ergibt sich:

$$A_n(-n^2 + 6in + 25)e^{int} = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2\pi} e^{int}, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n^2\pi((25-n^2)+6in}, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \textit{(1 Punkt)} \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4((25-n^2)-6in)}{n^2\pi((25-n^2)^2+36n^2)}, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \end{aligned}$$

Also erhalten wir für ungerade n:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= Re\ \widetilde{x_n}(t) \\ &= Re\ \{Re\ A_n \cos(nt) - Im\ A_n \sin(nt) + i\,(Im\ A_n \cos(nt) + Re\ A_n \sin(nt))\} \\ &= Re\ A_n \cos(nt) - Im\ A_n \sin(nt) \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ &= \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi((25-n^2)^2+36n^2)} \cos(nt) + \frac{24n}{n^2\pi((25-n^2)^2+36n^2)} \sin(nt) \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \end{aligned}$$

für gerade n ist $x_n(t) = 0$ *(1/2 Punkt)*. Also gilt:

$$x_n(t) = \sum_{n \text{ ungerade}} \left(\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi((25-n^2)^2+36n^2)} \cos(nt) + \frac{24}{n\pi((25-n^2)^2+36n^2)} \sin(nt) \right)$$

Siehe nächstes Blatt!

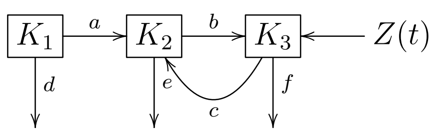
3. Kompartimentmodell *(10 Punkte)*

Ein aus drei Teilen K_1, K_2 und K_3 bestehendes Kompartimentsystem sei beschrieben durch das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -(a+d) & 0 & 0 \\ a & -(b+e) & c \\ 0 & b & -(c+f) \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dabei beschreibt $y_i(t)$ die Konzentration einer Substanz in Kompartiment K_i ($i \in \{1,2,3\}$) zur Zeit $t \geq 0$ und a, b, c, d, e, f sind positive reelle Zahlen.

a) Zeichnen Sie ein Kompartimentmodell, das (2) beschreibt und beschriften Sie die Pfeile entsprechend. *(2 Punkte)*



Die Parameter seien nun wie folgt gewählt: $a = b = c = e = f = 1$ und $d = 2$. Außerdem gehen wir von einem konstanten Zulauf $Z(t) = 4$ aus.

b) Berechnen Sie für $t \geq 0$ die Matrix $\exp(tA)$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $A = TJT^{-1}$ gilt, wobei

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= I_{n\times n} + tTJT^{-2} + \frac{1}{2!}t^2TJT^{-1}TJT^{-1} + ... \\ &= T(I_{n\times n} + tJ + \frac{1}{2!}t^2J^2 + ...)T^{-1} \\ &= T\exp(tJ)T^{-1} \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \textit{(2 Punkte)}$$

Bitte wenden!

wie man entweder mithilfe der Formel für das Exponential von Jordanmatrizen oder durch direkte Rechnung sieht. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{-3t} & 0 & 0 \\ (2t-1)e^{-3t} + e^{-t} & 2e^{-3t} + 2e^{-t} & -2e^{-3t} + 2e^{-t} \\ -(2t+1)e^{-3t} + e^{-t} & -2e^{-3t} + 2e^{-t} & 2e^{-3t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \textit{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = (1, 0, 0)^\top$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $y(t)$ geschrieben werden kann als

$$y(t) = \exp(tA)y(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)g(u)du.$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-u)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} du \\ &= \underbrace{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{-3t} \\ (2t-1)e^{-3t} + e^{-t} \\ -(2t+1)e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}}_{\textit{(1 Punkt)}} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-3t+3u} + 2e^{-t+u} \\ 2e^{-3t+3u} + 2e^{t+u} \end{pmatrix} du}_{\textit{(1 Punkt)}} \end{aligned}$$

Die Integration wird ausgeführt:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-3t+3u}du &= \frac{1}{3}e^{-3t}\left[e^{3u}\right]_0^t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}, \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ \int_0^t e^{-t+u}du &= e^{-t}\left[e^{u}\right]_0^t = 1 - e^{-t}, \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ (\frac{t}{2} + \frac{5}{12})e^{-3t} - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{4}{3} \\ -(\frac{t}{2} + \frac{11}{12})e^{-3t} - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{8}{3} \end{pmatrix}. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Partielle Differentialgleichungen *(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)*

Wir betrachten das Randwertproblem für $(x,y) \in [0,\pi]^2$:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0 \qquad \text{(Laplace-Gleichung)} \\ u(x,0) &= 0, \qquad u(x,\pi) = 0, \text{ für } x \in [0,\pi] \\ u(0,y) &= 0, \qquad u(\pi,y) = \varphi(y), \text{ für } y \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\varphi(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}y, & y \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2 - \frac{2}{\pi}y, & y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und Y an. *(2 Punkte)*

Hinweis: Wählen Sie das Vorzeichen der auftretenden Konstante so, dass sich für Y periodische Lösungen ergeben.

Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ gilt:

$$\begin{aligned} & X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \frac{X''(x)}{X(x)} = -\underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{=:-k^2} = k^2 > 0, \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

wobei wir hier verwendet haben, dass die linke Seite der Gleichung nur von x und die rechte nur von y abhängt, sie also beide konstant sein müssen. Weiterhin haben wir $Y''(y)/Y(y) = -k^2$, $k > 0$ gewählt, damit sich für Y periodische Lösungen ergeben. Wir erhalten für X und Y die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} X''(x) &= k^2 X(x), \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \\ Y''(y) &= -k^2 Y(y). \qquad \textit{(1/2 Punkt)} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für Y unter Beachtung der beidseitigen Randbedingungen $Y(0) = Y(\pi) = 0$. *(2 Punkte)*

Die allgemeine Lösung für Y lautet

$$Y(y) = A\cos(ky) + B\sin(ky), A, B \in \mathbb{R} \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Aus $Y(0) = 0$ folgt unmittelbar $A = 0$, aus $Y(\pi) = 0$ folgt dann $B\sin(k\pi) = 0$, also $k = n \in \mathbb{N}_0$ *(1 Punkt)*. Wir haben erhalten:

$$Y_n(y) = B_n \sin(ny) \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Bitte wenden!

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für X unter Beachtung der Randbedingung $X(0) = 0$. *(2 Punkte)*

Die allgemeine Lösung für X lautet

$$X(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}, C, D \in \mathbb{R}. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Aus der Randbedingung folgt $C = -D$ *(1 Punkt)*, also insgesamt:

$$X(x) = \widetilde{C_n} \sinh(nx) \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

d) Bestimmen Sie die Lösung von (3), die allen Randbedingungen genügt, durch Superposition. *(4 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \sin((2k+1)y)$ für $y \in [0, \pi]$. Sie dürfen benutzen, dass $\int y \sin(ny)dy = -\frac{y}{n} \cos(ny) + \frac{1}{n^2} \sin(ny) + c$ gilt, falls $n = 1, 2, ...$

Superposition der Basislösungen führt auf:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh(nx) \sin(ny) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

mit $F_n = \widetilde{C_n} B_n$, wobei der $(n = 0)$-Term verschwindet. Nun verlangen wir:

$$u(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh(n\pi) \sin(ny) = \varphi(y),$$

also sind $F_n \sinh(ny)$ die sin-Fourierkoeffizienten der ungeraden, 2π-periodischen Fortsetzung $\overline{\varphi}$ von φ. Wir benötigen also die Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi}(y) \sin(ny) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin(ny)dy \\
&= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin(ny)dy + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(ny) - \frac{4}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y \sin(ny)dy \\
&= \frac{4}{\pi^2} \left[-\frac{y}{n} \cos(ny) + \frac{1}{n^2} \sin(ny) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{n\pi} [\cos(ny)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \left[-\frac{y}{n} \cos(ny) + \frac{1}{n^2} \sin(ny) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2} \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ (-1)^k, & n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad \textit{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $F_{2k} = 0$, $F_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 \sinh((2k+1)\pi)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw.

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \frac{\sinh((2k+1)x)}{\sinh((2k+1)\pi)} \sin((2k+1)y) \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Nun betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0$, $D > 0$.

e) **(∗)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte nach x der Funktion u die Gleichung

$$\mathcal{F}[u](t,k) = C(k)\exp(-Dk^2t), \qquad C(k) \in \mathbb{C} \tag{4}$$

erfüllt. Bestimmen Sie anschließend $u(t,x)$ für den Fall, dass $u(0,x) = \exp(-x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Die Fouriertransformierte der Funktion ϕ mit $\phi(x) = \exp(-\alpha x^2)$ ist $\mathcal{F}[\phi](k) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp(-\frac{k^2}{4\alpha})$ $(\alpha > 0)$.

Wir Fourier-transformieren die partielle Differentialgleichung nach x. Wegen des Ableitungssatzes ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\mathcal{F}[u](t,k)}_{=:U_k(t)} + Dk^2\mathcal{F}[u](t,k) = 0 \qquad &\textit{(1 Punkt)}\\
\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}U_k(t) = -Dk^2U_k(t)&\\
\Rightarrow \qquad \mathcal{F}[u](t,k) = C(k)e^{-Dk^2t} \qquad &\textit{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

mit $C(k) \in \mathbb{C}$. Als nächstes bestimmen wir $C(k)$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
C(k) &= \mathcal{F}[u](0,k) = \mathcal{F}[x \mapsto \exp(-x^2)]\\
&= \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}} \qquad \textit{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[u](t,k) &= C(k)e^{-Dk^2t}\\
&= \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}e^{-Dk^2t}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4Dt+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4Dt+1}}}\exp\left(-\frac{k^2}{4\cdot\frac{1}{4Dt+1}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4Dt+1}}\mathcal{F}\left[x \mapsto e^{-\frac{x^2}{4Dt+1}}\right](k) \qquad \textit{(1 Punkt)},
\end{aligned}$$

und nach Anwendung der inversen Fouriertransformation ergibt sich:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4Dt+1}}e^{-\frac{x^2}{4Dt+1}} \qquad \textit{(1 Punkt)}.$$