D-HEST

Prüfung Mathematik III, Winter 2018

Prof. Dr. E. W. Farkas

Viel Erfolg!

1. Laplace-Transformation *(10 Punkte)*

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $Re\ s > \alpha_f$, wobei $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

a) Die Funktion f sei gegeben durch $f(t) = 3\sin(t-2)\sigma(t-2) + e^{-7t}$, wobei $\sigma(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$ Berechnen Sie $\mathcal{L}[f](s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re\ s > 0$. *(3 Punkte)*

b) Zeigen Sie allgemein, dass für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re\ s > \max\{\alpha_g, \alpha_{g'}\}$ gilt:

$$\mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0),$$

falls g, g' beide die oben genannten Bedingungen erfüllen. *(2 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration.

Betrachten Sie nun das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y(t) = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass für die Laplace-Transformierte von y gilt:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s(s^2+1)}.$$

Finden Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$. *(3 Punkte)*

d) Finden Sie $y(t)$ durch Rücktransformation. *(2 Punkte)*

Bitte wenden!

2. Fourierreihen *(10 Punkte)*

Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$ auf $[-\pi, \pi[$, 2π-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f, es gilt also:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der Funktion f. *(3 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie von f.

b) Benutzen Sie die Fourierreihe von f, um zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

(2 Punkte)

Wir betrachten nun einen getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator mit der obigen Funktion f als äußerer Kraftwirkung:

$$x''(t) + 6x'(t) + 25x(t) = f(t), \tag{1}$$

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung x_h der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung und zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} x_h(t) = 0$. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie nun eine spezielle Lösung von (1). *(3 Punkte)*

Hinweis: Finden Sie für $n \geq 1$ jeweils eine Lösung x_n von

$$x_n''(t) + 6x_n'(t) + 25x_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Dann ist $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ eine Lösung von (1).

Siehe nächstes Blatt!

3. Kompartimentmodell *(10 Punkte)*

Ein aus drei Teilen K_1, K_2 und K_3 bestehendes Kompartimentsystem sei beschrieben durch das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -(a+d) & 0 & 0 \\ a & -(b+e) & c \\ 0 & b & -(c+f) \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dabei beschreibt $y_i(t)$ die Konzentration einer Substanz in Kompartiment K_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) zur Zeit $t \geq 0$ und a, b, c, d, e, f sind positive reelle Zahlen.

a) Zeichnen Sie ein Kompartimentmodell, das (2) beschreibt und beschriften Sie die Pfeile entsprechend. *(2 Punkte)*

Die Parameter seien nun wie folgt gewählt: $a = b = c = e = f = 1$ und $d = 2$. Außerdem gehen wir von einem konstanten Zulauf $Z(t) = 4$ aus.

b) Berechnen Sie für $t \geq 0$ die Matrix $\exp(tA)$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $A = TJT^{-1}$ gilt, wobei

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + g(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = (1, 0, 0)^\top$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $y(t)$ geschrieben werden kann als

$$y(t) = \exp(tA)y(0) + \int_0^t \exp((t-u)A)g(u)du.$$

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen *(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)*

Wir betrachten das Randwertproblem für $(x, y) \in [0, \pi]^2$:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0 \qquad && \text{(Laplace-Gleichung)} \\ u(x,0) &= 0, \qquad u(x,\pi) = 0, \ \text{für } x \in [0,\pi] && \\ u(0,y) &= 0, \qquad u(\pi,y) = \varphi(y), \ \text{für } y \in [0,\pi], && \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\varphi(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} y, & y \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2 - \frac{2}{\pi} y, & y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und geben Sie Differentialgleichungen für X und Y an. *(2 Punkte)*

Hinweis: Wählen Sie das Vorzeichen der auftretenden Konstante so, dass sich für Y periodische Lösungen ergeben.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für Y unter Beachtung der beidseitigen Randbedingungen $Y(0) = Y(\pi) = 0$. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für X unter Beachtung der Randbedingung $X(0) = 0$. *(2 Punkte)*

d) Bestimmen Sie die Lösung von (3), die allen Randbedingungen genügt, durch Superposition. *(4 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \sin((2k+1)y)$ für $y \in [0, \pi]$. Sie dürfen benutzen, dass $\int y \sin(ny) dy = -\frac{y}{n} \cos(ny) + \frac{1}{n^2} \sin(ny) + c$ gilt, falls $n = 1, 2, ...$

Nun betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0$, $D > 0$.

e) **(*)** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte nach x der Funktion u die Gleichung

$$\mathcal{F}[u](t, k) = C(k) \exp(-Dk^2 t), \qquad C(k) \in \mathbb{C} \tag{4}$$

erfüllt. Bestimmen Sie anschließend $u(t, x)$ für den Fall, dass $u(0, x) = \exp(-x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

Hinweis: Die Fouriertransformierte der Funktion ϕ mit $\phi(x) = \exp(-\alpha x^2)$ ist $\mathcal{F}[\phi](k) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(-\frac{k^2}{4\alpha})$ $(\alpha > 0)$.