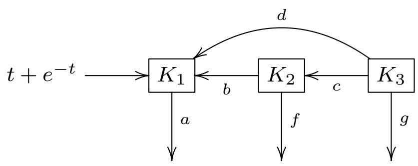
Prüfung Februar 2020
Lösung

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [10 Punkte]

Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3. Die Stoffmenge einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten sei beschrieben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ und a, b, c, d, f, g seien positive reelle Zahlen.



(a) Formulieren Sie ein geeignetes lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + U(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, U \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \tag{1}$$

welches dieses Kompartimentmodell beschreibt. [2 Punkte]

Lösung:

Das zugehörige Differentialgleichungssystem lautet:

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ 0 & 0 & -(c+d+g) \end{pmatrix}}_{=:A,\ \textit{[1 Punkt]}} \cdot Y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} t + e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:U(t),\ \textit{[1 Punkt]}}$$

In den nachfolgenden Aufgabenteilen sei $a = c = d = f = g = 1$ und $b = 2$.

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass mit diesen Parametern für die Matrix A aus Teil (a) gilt: $T^{-1} \cdot A \cdot T = J$, wobei

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Matrix A lautet mit den angegebenen Parametern:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden nun:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= I_{3\times 3} + T(tJ)T^{-1} + \frac{1}{2!}T(tJ)T^{-1}T(tJ)T^{-1} + ... \\ &= T(I_{3\times 3} + tJ + \frac{1}{2!}(tJ)^2 + ...)T^{-1} \\ &= T\exp(tJ)T^{-1}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Weiterhin gilt:

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

[2 Punkte]
wie man mit der Formel für das Exponential von Jordan-Matrizen (oder durch direkte Rechnung) sieht.
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= T \cdot \exp(tJ) \cdot T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - (t+1)e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1 Punkt]

(c) Finden Sie die Lösung von (1), falls gilt $Y(0) = (0,0,2)^\top$. [3 Punkte]

Lösung:
Wir verwenden die Formel für mehrdimensionale 'Variation der Konstanten':

$$\begin{aligned} Y(t) &= \exp(tA) \cdot Y(0) + \int_0^t \exp((t-s)A) \cdot U(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - (t+1)e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & e^{-(t-s)} - e^{-3(t-s)} & e^{-(t-s)} - (t-s+1)e^{-3(t-s)} \\ 0 & e^{-3(t-s)} & (t-s)e^{-3(t-s)} \\ 0 & 0 & e^{-3(t-s)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s + e^{-s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 2(t+1)e^{-3t} \\ 2te^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} se^s e^{-t} + e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds \qquad \textit{[1 Punkt]} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 2(t+1)e^{-3t} \\ 2te^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [e^{-t}se^s - e^{-t}e^s]_0^t + te^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3+t)e^{-t} - 2(t+1)e^{-3t} + t - 1 \\ 2te^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{pmatrix}. \qquad \textit{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

(d) Gibt es einen stationären Zustand Y_∞ des DGL-Systems (1)? Begründen Sie. [1 Punkt]

Lösung:
Es gibt keinen stationären Zustand, denn wäre $Y_\infty \in \mathbb{R}^3$ ein stationärer Zustand, dann wäre:

$$0 = \frac{d}{dt} Y_\infty = A \cdot Y_\infty + U(t) \qquad \Rightarrow \qquad U(t) = -A \cdot Y_\infty,$$

aber U ist t-abhängig, während die rechte Seite t-unabhängig ist.
[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

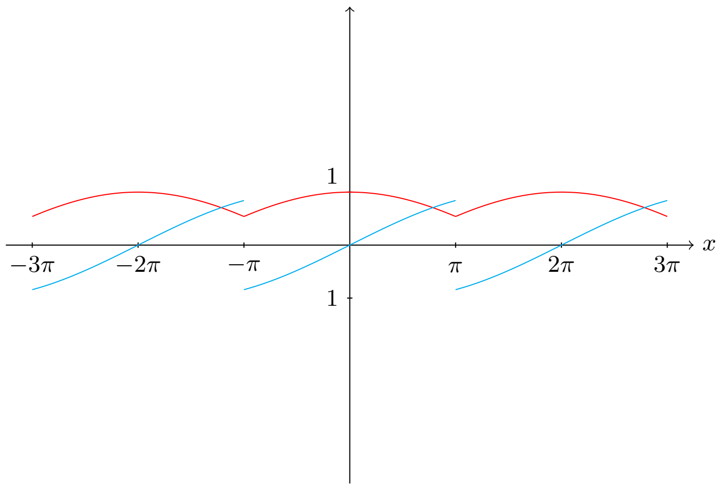
2. Fourier-Reihen [10 Punkte]

Die Funktionen $\widetilde{g}$ und $\widetilde{u}$ seien gegeben auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ durch $\widetilde{g}(x)=\cos(\alpha x)$ und $\widetilde{u}(x)=\sin(\alpha x)$, wobei $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Wir bezeichnen mit g und u die jeweilige 2π-periodische Fortsetzung von $\widetilde{g}$ beziehungsweise $\widetilde{u}$.

(a) In dieser (und **nur** dieser) Teilaufgabe wählen wir $\alpha=\frac{1}{\pi}$. Skizzieren Sie g und u für $-3\pi<x<3\pi$ in das unten stehende Koordinatensystem:

Lösung:

Die Graphen von g und u haben die folgende Form:



[2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die komplexen und reellen Fourierkoeffizienten der Funktion u. [5 Punkte]

Hinweis: Verwenden Sie: $\sin(\gamma)=\frac{1}{2i}(e^{i\gamma}-e^{-i\gamma})$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

Lösung:

Die allgemeine Formel für die Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion u lautet

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{-inx}dx.$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2i}(e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x})e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i(\alpha-n)x}-e^{-i(\alpha+n)x})dx\\
&= \frac{1}{4\pi i}\frac{1}{i(\alpha-n)}\left[e^{i(\alpha-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4\pi i}\frac{1}{(-i)(\alpha+n)}\left[e^{-i(\alpha+n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \qquad \textit{[1 Punkt]}\\
&= -\frac{1}{4\pi(\alpha-n)}(e^{i\alpha\pi}e^{-in\pi}-e^{-i\pi\alpha}e^{in\pi})-\frac{1}{4\pi(\alpha+n)}(e^{-i\alpha\pi}e^{-in\pi}-e^{i\alpha\pi}e^{in\pi}) \qquad \textit{[1 Punkt]}\\
&= -\frac{(-1)^n2n(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})}{4\pi(\alpha^2-n^2)}\\
&= \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha^2-n^2)}(-ni)\frac{1}{2i}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})=\frac{(-1)^{n+1}ni}{\pi(\alpha^2-n^2)}\sin(\alpha\pi). \qquad \textit{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun noch die reellen Fourierkoeffizienten: Da die Funktion u ungerade ist, gilt

$$a_n=0 \qquad \forall n\geq 0.$$

Bitte wenden!

[1 Punkt]
Weiterhin gilt:

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\frac{2(-1)^{n+1}ni}{\pi(\alpha^2 - n^2)}\sin(\alpha\pi) = \frac{2(-1)^n n}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}, \qquad n \geq 1.$$

[1 Punkt]

(c) Die reellen Fourierkoeffizienten von g lauten:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}, & n \geq 0, \\ b_n = 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Die Funktion g wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre reelle Fourierreihe dargestellt. Benutzen Sie dies, um nachzuweisen, dass die folgende Formel gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cos(\alpha\pi)}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}.$$

[3 Punkte]

Lösung:
Die Funktion g ist stückweise stetig differenzierbar und auf $\mathbb{R}$ stetig, wird also überall durch ihre (komplexe oder reelle) Fourierreihe dargestellt.
Wir haben für $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}\cos(nx).$$

[1 Punkt]
Wir setzen auf beiden Seiten jetzt $x = \pi$ ein und erhalten:

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}(-1)^{2n} \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cos(\alpha\pi)}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}.$$

Dies ist gerade die gesuchte Formel.
[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

3. Laplace-Transformation [10 + 2 Punkte]

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lautet:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

(a) Die Funktion g sei auf $[0, \infty)$ gegeben durch $g(t) = t3^{2t} - (t-2)^2\theta(t-1)$, wobei

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $\text{Re}(s) > \alpha_g$ mithilfe geeigneter Transformationssätze. [4 Punkte]

Lösung:

Zuerst benutzen wir die Linearität der Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto te^{2\ln(3)t}](s) - \mathcal{L}[t \mapsto (t-2)^2\theta(t-1)](s) \\
&= \underbrace{\mathcal{L}[t \mapsto t](s - 2\ln(3))}_{\text{Dämpfungssatz, } \textit{[1 Punkt]}} - \mathcal{L}[t \mapsto (t-1-1)^2\theta(t-1)](s) \\
&= \underbrace{\frac{1}{(s-2\ln(3))^2}}_{\textit{[1 Punkt]}} - \mathcal{L}[t \mapsto (t-1)^2\theta(t-1)](s) \\
&+ 2\mathcal{L}[t \mapsto (t-1)\theta(t-1)](s) - \mathcal{L}[t \mapsto \theta(t-1)](s) \\
&= \frac{1}{(s-2\ln(3))^2} - e^{-s}\Big(\mathcal{L}[t \mapsto t^2](s) - 2\mathcal{L}[t \mapsto t](s) + \mathcal{L}[1](s)\Big) \text{ Verschiebungssatz, } \textit{[1 Punkt]} \\
&= \frac{1}{(s-2\ln(3))^2} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

[1 Punkt]

(b) Sei y die Lösung der folgenden Integro-Differentialgleichung:

$$y'(t) + \int_0^t y(t-u)du = \cos(t), \qquad y(0) = 0.$$

(i) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ gelten muss.
Hinweis: Sie können das Integral als eine geeignete Faltung darstellen und den Faltungssatz verwenden.

(ii) Finden Sie y durch Rücktransformation.
Hinweis: Für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\gamma)\cos(\delta) = \frac{1}{2}\Big(\cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta)\Big).$$

[4 Punkte]

Lösung:

(i) Die Integro-Differentialgleichung lautet:

$$y'(t) + (y * 1)(t) = \cos(t)$$

Wenden wir auf beide Seiten der Gleichung die Laplace-Transformation an, erhalten wir mithilfe von Faltungs- und Ableitungssatz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'](s) + \mathcal{L}[y](s)\mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[\cos](s) &= \frac{s}{s^2+1} \ \textit{[1 Punkt]} \\
s\mathcal{L}[y](s) - \underbrace{y(0)}_{=0} + \mathcal{L}[y](s)\frac{1}{s} &= \frac{s}{s^2+1} \ \textit{[1/2 Punkt]} \\
\Rightarrow \qquad \mathcal{L}[y](s)\frac{s^2+1}{s} &= \frac{s}{s^2+1} \\
\Rightarrow \qquad \mathcal{L}[y](s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)^2}. \ \textit{[1/2 Punkt]}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

(ii) Wir bemerken:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos](s) \cdot \mathcal{L}[\cos](s) = \mathcal{L}[\cos * \cos](s).$$

[1/2 Punkt]
Damit haben wir

$$\begin{aligned} y(t) &= (\cos * \cos)(t) \\ &= \int_0^t \cos(t-u)\cos(u)du, \;\; \textit{[1/2 Punkt]} \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}\cos(t)du + \int_0^t \frac{1}{2}\cos(2u-t)du \\ &= \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{4}[\sin(2u-t)]_0^t \\ &= \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{4}(\sin(t) - \sin(-t)) \\ &= \frac{1}{2}t\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t). \end{aligned}$$

[1 Punkt]

(c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[p](s)$ der *periodischen* Funktion $p : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $p(t) = |\sin(2t)|$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. [2 Punkte]

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass gilt:

$$\int e^{at}\sin(bt)dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a\sin(bt) - b\cos(bt)), \qquad a,b \neq 0.$$

Lösung:
Die Funktion p hat die Periode $\frac{\pi}{2}$, also haben wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p](s) &= \frac{1}{1-e^{-sP}}\int_0^P p(t)e^{-st}dt \qquad \textit{[1/2 Punkt]} \\ &\overset{P=\pi/2}{=} \frac{1}{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st}\sin(2t)dt \qquad \textit{[1/2 Punkt]} \\ &= \frac{1}{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}\frac{e^{-st}}{(-s)^2+4}\left[-s\sin(2t) - 2\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(Hinweis mit } a=-s,\, b=2) \\ &= \frac{1+e^{-s\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-s\frac{\pi}{2}}}\frac{2}{s^2+4}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]
Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) **(∗)** Seien $h_1, h_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit $\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2} \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass für das Produkt $H : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, mit $H(t) = h_1(t)\cdot h_2(t)$, gilt

$$\alpha_H \leq \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}.$$

[2 Zusatzpunkte]

Hinweis: Es genügt nachzuweisen, dass für $\alpha > \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}$ gilt: $|H(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, $t \geq 0$ für ein $C > 0$.

Lösung:
Sei $\alpha > \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}$. Wir wählen $\alpha_1 > \alpha_{h_1}$ und $\alpha_2 > \alpha_{h_2}$ sodass $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. So finden wir $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ sodass gilt:

$$|h_1(t)| \leq C_1 e^{\alpha_1 t}, \qquad |h_2(t)| \leq C_2 e^{\alpha_2 t}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

Also ist

$$|H(t)| = |h_1(t)h_2(t)| \leq C_1C_2e^{\alpha_1 t}e^{\alpha_2 t} = C_1C_2e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} =: Ce^{\alpha t},$$

wenn wir $C = C_1C_2 > 0$ setzen. Also ist

$$\alpha_H \leq \inf(\alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}, \infty) = \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}. \qquad \textit{[1 Punkt]}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Partielle Differentialgleichungen [10 + 3 Punkte]

Wir betrachten zunächst das folgende Randwertproblem für Laplace-Gleichung, wobei

$$B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \qquad \partial B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Ursprung und ihren Rand darstellen:

(PDE)	$\Delta u = 0,$	für $(x,y) \in B_3(0)$
(RB)	$u(x,y) = 3 - y^3 + xy,$	für $(x,y) \in \partial B_3(0)$

(a) Schreiben Sie das System aus (PDE) und (RB) in Polarkoordinaten um. [2 Punkte]

Lösung:

Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

[1/2 Punkt]

Auf $\partial B_3(0)$ haben wir $r = 3$ und damit in Polarkoordinaten $x = 3\cos(\phi)$ und $y = 3\sin(\phi)$.

[1/2 Punkt]

Damit lautet das System aus (PDE) und (RB) in Polarkoordinaten:

(PDE)	$u_{rr}(r,\phi) + \frac{1}{r}u_r(r,\phi) + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}(r,\phi) = 0,$	für $r \in [0,3)$, $\phi \in [0,2\pi)$
(RB)	$u(3,\phi) = 3 - 27\sin^3(\phi) + 9\sin(\phi)\cos(\phi),$	für $\phi \in [0,2\pi)$

[1 Punkt]

(b) Die allgemeine Lösung von (PDE) in Polarkoordinaten lautet:

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)).$$

Wählen Sie die Koeffizienten $(A_n)_{n\geq 0}$ und $(B_n)_{n\geq 1}$ geeignet, damit u eine Lösung des Randwertproblems ist. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) und (RB) in *kartesischen Koordinaten* an. [5 Punkte]

Hinweis: Verwenden Sie ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$\sin^3(\gamma) = \frac{3}{4}\sin(\gamma) - \frac{1}{4}\sin(3\gamma),$$
$$\sin(\gamma)\cos(\gamma) = \frac{1}{2}\sin(2\gamma).$$

Lösung:

Wir stellen einen Koeffizientenvergleich an:

$$\begin{aligned} u(3,\phi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)) \\ &\stackrel{!}{=} 3 - 27\sin^3(\phi) + 9\sin(\phi)\cos(\phi) \end{aligned}$$

[1/2 Punkt]

Wir setzen die Formeln aus dem Hinweis ein:

$$\begin{aligned} u(3,\phi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)) \\ &\stackrel{!}{=} 3 - \frac{81}{4}\sin(\phi) + \frac{27}{4}\sin(3\phi) + \frac{9}{2}\sin(2\phi) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[1/2 Punkt]

woraus sich sofort ergibt:

$$A_0 = 3, \qquad 3B_1 = -\frac{81}{4}, \qquad 3^2 B_2 = \frac{9}{2}, \qquad 3^3 B_3 = \frac{27}{4}$$

bzw.

$$A_0 = 3, \qquad B_1 = -\frac{27}{4}, \qquad B_2 = \frac{1}{2}, \qquad B_3 = \frac{1}{4}$$

und $A_n = 0$ für alle $n \geq 1$, $B_n = 0$ für alle $n \geq 4$.

[2 Punkt]

Die Lösung in Polarkoordinaten ist damit:

$$u(r, \phi) = 3 - \frac{27}{4} r \sin(\phi) + \frac{1}{2} r^2 \sin(2\phi) + \frac{1}{4} r^3 \sin(3\phi).$$

[1 Punkt]

Wir benutzen die Formeln aus dem Hinweis nochmal:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 3 - \frac{27}{4} y + r^2 \sin(\phi)\cos(\phi) + \frac{1}{4} r^3 (3\sin(\phi) - 4\sin^3(\phi)) \\ &= 3 - \frac{27}{4} y + xy - y^3 + \frac{3}{4}(x^2 + y^2) y, \end{aligned}$$

wobei wir $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ und $x^2 + y^2 = r^2$ verwenden.

[1 Punkt]

(c) Berechnen Sie ∇e^{-r^3} und Δe^{-r^3} für $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. [3 Punkte]

Hinweis: Für eine differenzierbare radialsymmetrische Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, das bedeutet $g(\boldsymbol{x}) = f(r(\boldsymbol{x}))$, gilt $\nabla g(\boldsymbol{x}) = f'(r)\frac{\boldsymbol{x}}{r}$, wobei $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$.

Lösung:

Für den Gradienten benutzen wir die Formel aus dem Hinweis mit $f(r) = e^{-r^3}$:

$$\nabla e^{-r^3} = -3r^2 e^{-r^3} \frac{\boldsymbol{x}}{r} = -3re^{-r^3} \boldsymbol{x}.$$

[1 Punkt]

Als Nächstes benutzen wir, dass gilt

$$\nabla(\varphi \boldsymbol{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi(\nabla \cdot \boldsymbol{A}),$$

also

$$\begin{aligned} \Delta e^{-r^3} &= \nabla \cdot (\nabla e^{-r^3}) \\ &= \nabla \cdot (-3re^{-r^3} \boldsymbol{x}) \\ &= (-3e^{-r^3} + 9r^3 e^{-r^3}) \underbrace{\frac{\boldsymbol{x}}{r} \cdot \boldsymbol{x}}_{=r} - 3re^{-r^3} \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{x}}_{=3} \qquad \textit{[1 Punkt]} \\ &= (9r^4 - 12r)e^{-r^3}. \qquad \textit{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) **(∗)** Wir betrachten nun das folgende Randwertproblem für Laplace-Gleichung, wobei

$$B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \qquad \partial B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 1 um den Ursprung und ihren Rand darstellen:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{PDE})_2 & \Delta u = 0, & \text{für } (x, y) \in B_1(0) \\ (\mathrm{RB})_2 & u(x, y) = \sin(x - y) - xy^{2020}, & \text{für } (x, y) \in \partial B_1(0) \end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

Beweisen Sie unter Benutzung des Maximumprinzips, dass für eine Lösung u von $(\mathrm{PDE})_2$ und $(\mathrm{RB})_2$ die Abschätzung gilt: $|u(x,y)| \leq 2$ für alle $(x,y) \in B_1(0)$. [3 Zusatzpunkte]

Lösung:

Die Lösung u ist harmonisch, daher liegen nach dem Maximumprinzip Maximum (und Minimum) von u auf dem Rand $\partial B_1(0)$.

[1 Punkt]

Nun gilt aber:

$$|u(x,y)| = |\sin(x-y) - xy^{2020}| \leq |\sin(x-y)| + |x||y|^{2020} \leq 1 + 1 \cdot 1^{2020} = 2.$$

auf dem Rand $(x,y) \in \partial B_1(0)$.

[1 Punkt]

Somit gilt:

$$-2 \leq \min_{\partial B_1(0)} u \leq u(x,y) \leq \max_{\partial B_1(0)} u \leq 2,$$

falls $(x,y) \in B_1(0)$, also $|u(x,y)| \leq 2$.

[1 Punkt]

Bitte wenden!