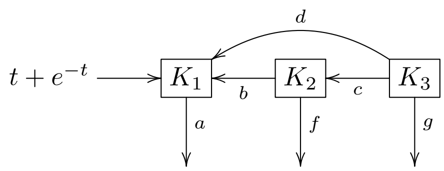
Aufgaben

1. Systeme linearer Differentialgleichungen [10 Punkte]

Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3. Die Stoffmenge einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten sei beschrieben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ und a, b, c, d, f, g seien positive reelle Zahlen.



(a) Formulieren Sie ein geeignetes lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + U(t), \qquad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, U \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \tag{1}$$

welches dieses Kompartimentmodell beschreibt. [2 Punkte]

In den nachfolgenden Aufgabenteilen sei $a = c = d = f = g = 1$ und $b = 2$.

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$. [4 Punkte]
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass mit diesen Parametern für die Matrix A aus Teil (a) gilt: $T^{-1} \cdot A \cdot T = J$, wobei

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

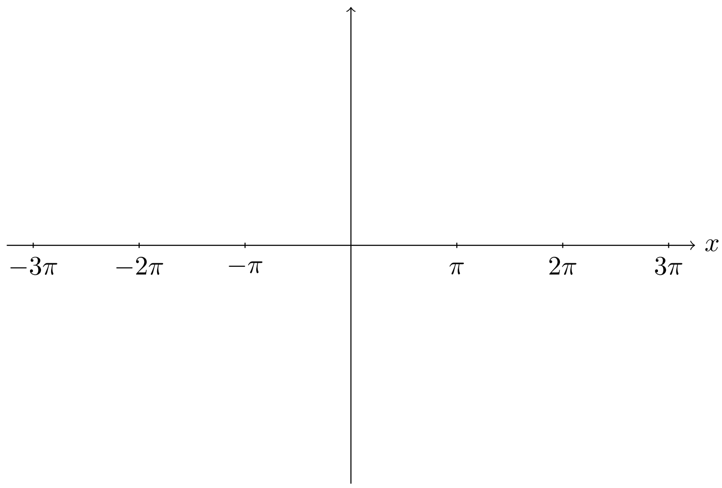
(c) Finden Sie die Lösung von (1), falls gilt $Y(0) = (0, 0, 2)^\top$. [3 Punkte]

(d) Gibt es einen stationären Zustand Y_∞ des DGL-Systems (1)? Begründen Sie. [1 Punkt]

2. Fourierreihen [10 Punkte]

Die Funktionen $\widetilde{g}$ und $\widetilde{u}$ sei gegeben auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch $\widetilde{g}(x) = \cos(\alpha x)$ und $\widetilde{u}(x) = \sin(\alpha x)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Wir bezeichnen mit g und u die jeweilige 2π-periodische Fortsetzung von $\widetilde{g}$ beziehungsweise $\widetilde{u}$.

(a) In dieser (und **nur** dieser) Teilaufgabe wählen wir $\alpha = \frac{1}{\pi}$. Skizzieren Sie g und u für $-3\pi < x < 3\pi$ in das unten stehende Koordinatensystem:



[2 Punkte]

(b) Berechnen Sie die komplexen und reellen Fourierkoeffizienten der Funktion u. [5 Punkte]
Hinweis: Verwenden Sie: $\sin(\gamma) = \frac{1}{2i}(e^{i\gamma} - e^{-i\gamma})$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

(c) Die reellen Fourierkoeffizienten von g lauten:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}, & n \geq 0, \\ b_n = 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Die Funktion g wird auf ganz $\mathbb{R}$ durch ihre reelle Fourierreihe dargestellt. Benutzen Sie dies, um nachzuweisen, dass die folgende Formel gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cos(\alpha\pi)}{2\alpha \sin(\alpha\pi)}.$$

[3 Punkte]

Siehe nächstes Blatt!

3. Laplace-Transformation [10 + 2 Punkte]

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[f]$ einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lautet:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\}$.

(a) Die Funktion g sei auf $[0, \infty)$ gegeben durch $g(t) = t3^{2t} - (t-2)^2\theta(t-1)$, wobei

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathcal{L}[g](s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \alpha_g$ mithilfe geeigneter Transformationssätze. Sie müssen α_g nicht angeben. [4 Punkte]

(b) Sei y die Lösung der folgenden Integro-Differentialgleichung:

$$y'(t) + \int_0^t y(t-u)du = \cos(t), \qquad y(0) = 0.$$

(i) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ gelten muss.
Hinweis: Sie können das Integral als eine geeignete Faltung darstellen und den Faltungssatz verwenden.

(ii) Finden Sie y durch Rücktransformation.
Hinweis: Für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\gamma)\cos(\delta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta)\big).$$

[4 Punkte]

(c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[p](s)$ der *periodischen* Funktion $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $p(t) = |\sin(2t)|$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. [2 Punkte]
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass gilt:

$$\int e^{at}\sin(bt)dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}(a\sin(bt) - b\cos(bt)), \qquad a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) **(∗)** Seien $h_1, h_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit $\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2} \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass für das Produkt $H : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, mit $H(t) = h_1(t) \cdot h_2(t)$, gilt

$$\alpha_H \leq \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}.$$

[2 Zusatzpunkte]

Hinweis: Es genügt nachzuweisen, dass für $\alpha > \alpha_{h_1} + \alpha_{h_2}$ gilt: $|H(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, $t \geq 0$ für ein $C > 0$.

Bitte wenden!

4. Partielle Differentialgleichungen [10 + 3 Punkte]

Wir betrachten zunächst das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{array}{lll} \text{(PDE)} & \Delta u = 0, & \text{für } (x,y) \in B_3(0) \\ \text{(RB)} & u(x,y) = 3 - y^3 + xy, & \text{für } (x,y) \in \partial B_3(0), \end{array}$$

wobei

$$B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\} \qquad \text{und} \qquad \partial B_3(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Ursprung und ihren Rand darstellen.

(a) Schreiben Sie das System aus (PDE) und (RB) in Polarkoordinaten um. [2 Punkte]

(b) Die allgemeine Lösung von (PDE) in Polarkoordinaten lautet:

$$u(r,\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)).$$

Wählen Sie die Koeffizienten $(A_n)_{n\geq 0}$ und $(B_n)_{n\geq 1}$ geeignet, damit u eine Lösung des Randwertproblems ist. Geben Sie dann die Lösung von (PDE) und (RB) in *kartesischen Koordinaten* an. [5 Punkte]

Hinweis: Verwenden Sie ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \sin^3(\gamma) &= \frac{3}{4}\sin(\gamma) - \frac{1}{4}\sin(3\gamma), \\ \sin(\gamma)\cos(\gamma) &= \frac{1}{2}\sin(2\gamma). \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie ∇e^{-r^3} und Δe^{-r^3} für $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. [3 Punkte]
Hinweis: Für eine differenzierbare radialsymmetrische Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(\boldsymbol{x}) = f(r(\boldsymbol{x})),$$

gilt $\nabla g(\boldsymbol{x}) = f'(r)\frac{\boldsymbol{x}}{r}$, wobei $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^\top$.

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe:

(d) **(∗)** Wir betrachten nun das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{array}{lll} \text{(PDE)}_2 & \Delta u = 0, & \text{für } (x,y) \in B_1(0) \\ \text{(RB)}_2 & u(x,y) = \sin(x-y) - xy^{2020}, & \text{für } (x,y) \in \partial B_1(0), \end{array}$$

wobei

$$B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \qquad \text{und} \qquad \partial B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

die Kreisscheibe mit Radius 1 um den Ursprung und ihren Rand darstellen.

Beweisen Sie unter Benutzung des Maximumprinzips, dass für eine Lösung u von (PDE)_2 und (RB)_2 folgende Abschätzung gilt: $|u(x,y)| \leq 2$ für alle $(x,y) \in B_1(0)$. [3 Zusatzpunkte]