Aufgaben und Lösungsvorschlag

1. Fourierreihen **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die $2\pi-$periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(a) [**2 Punkte**] Skizzieren Sie den Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(c) Wir bezeichnen mit $D \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}$ in welchen die Fourierreihe punktweise gegen f konvergiert.

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

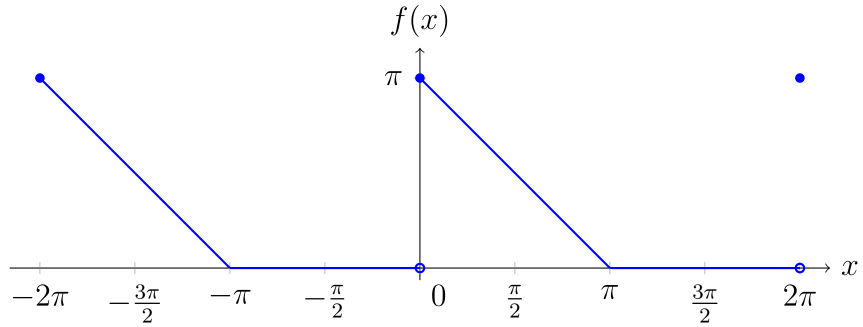
(ii) [**1 Punkte**] Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe von f für $x \notin D$.

Begründen Sie ihre Antworten.

(d) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Lösung:

(a)



(b) Aus der Definition der reellen Fourierkoeffizienten erhalten wir mittels partieller Integration und $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\left(x\sin(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = -\frac{\cos(nx)}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\ &= -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\left(x\cos(nx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{1-(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n} - \left.\frac{1}{\pi n^2}\sin(nx)\right|_0^{\pi} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Somit ist die reelle Fourierreihe gegebene durch

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

(c) Die $2\pi-$periodische Funktion f erfüllt die Dirichlet-Bedingungen aus Satz 1.5 und damit wissen wir, dass die Fourierreihe von f für jedes $x \in \mathbb{R}$ punktweise gegen das artithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes in x konvergiert. Da die Fortsetzung bis auf die Punkte $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ stetig is, konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f für $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. In den Punkten $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{x\downarrow 2\pi k} f(x) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow 2\pi k} f(x) = 0$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und somit erhalten wir

$$\frac{\lim_{x\downarrow 2\pi k} f(x) + \lim_{x\uparrow 2\pi k} f(x)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

für $k \in \mathbb{Z}$, jedoch gilt $f(2\pi k) = \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt:

(i) $D = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

(ii) und die Fourierreihe konvergiert für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ gegen $\pi/2$.

(d) Gemäss Teilaufgabe c) konvergiert die Fourierreihe in $x = 0$ gegen $\pi/2$ und somit erhalten wir mit dem Resultat aus Teilaufgabe b)

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \left.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}\right)\right|_{x=0} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{4} &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

2. Laplace-Transformation **[10 Punkte]**

(a) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = t^{3/2} + (t-3)^2\sigma(t-3),$$

wobei $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, direkt aus der Definition der Laplace-Transformation.

(b) **[3 Punkte]** Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{s^2}{s^4+4}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Identität $s^4+4 = ((s-1)^2+1)((s+1)^2+1)$ ohne Beweis verwenden.

(c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t) + 2\sin(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

(d) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösung $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender Gleichung

$$\int_0^t x(s)(t-s)e^{-(t-s)}\,ds = t^3e^t,$$

wobei $t \geq 0$.

Lösung:

(a) Aus der Linearität des Integrals und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty t^{3/2}e^{-st}\,dx + \int_0^\infty (t-3)^2\sigma(t-3)e^{-st}\,dt \\
&= -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^{3/2}\frac{d}{dt}e^{-st}\,dt - \frac{1}{s}\int_3^\infty (t-3)^2\frac{d}{dt}e^{-st}\,dt \\
&= \frac{3}{2s}\int_0^\infty t^{1/2}e^{-st}\,dt + \frac{2}{s}\int_3^\infty (t-3)e^{-st}\,dt \\
&= \frac{3}{s}\int_0^\infty \tau^2 e^{-s\tau^2}\,d\tau - \frac{2}{s^2}\int_3^\infty (t-3)\frac{d}{dt}e^{-st}\,dx \quad (\tau = t^{1/2},\, dt = 2\tau\,d\tau) \\
&= -\frac{3}{2s^2}\int_0^\infty \tau\frac{d}{d\tau}e^{-s\tau^2}\,d\tau + \frac{2}{s^2}\int_3^\infty e^{-st}\,dt \\
&= \frac{3}{2s^2}\int_0^\infty e^{-s\tau^2}\,d\tau + \frac{2}{s^3}e^{-3t} = \frac{3}{4s^2}\int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau^2}\,d\tau + \frac{2}{s^3}e^{-3t} \\
&= \frac{3}{4s^2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} + \frac{2}{s^3}e^{-3t} = \frac{3\pi^{1/2}}{4s^{5/2}} + \frac{2}{s^3}e^{-3t}
\end{aligned}$$

für $s > 0$, wobei wir verwendet haben dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$ für $a > 0$ gilt.

(b) Zuerst machen wir eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{s^2}{s^4+4} = \frac{as+b}{(s+1)^2+1} + \frac{cs+d}{(s-1)^2+1}$$

für noch zu bestimmende Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Multiplizieren wir die Identität mit $s^4 + 4$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} s^2 &= as^3 + (-2a+b)s^2 + (2a-2b)s + 2b + cs^3 + (2c+d)s^2 + (2c+2d)s + 2d \\ &= (a+c)s^3 + (2c+d-2a+b)s^2 + 2(a-b+c+d)s + 2(b+d). \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich folgt $a = -c = -1/4$, $b = d = 0$ und damit erhalten wir

$$\frac{s^2}{s^4+4} = -\frac{1}{4}\frac{s}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{4}\frac{s}{(s-1)^2+1} = -\frac{1}{4}\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{4}\frac{(s-1)+1}{(s-1)^2+1}.$$

Aus Sätzen der Vorlesung wissen wir

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s\pm 1)^2+1}\right](t) = e^{\mp t}\sin(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\pm 1}{(s\pm 1)^2+1}\right](t) = e^{\mp t}\cos(t).$$

Damit erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2+4}\right](t) &= \frac{1}{4}\left[-e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) + e^{t}\cos(t) + e^{t}\sin(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}(\sinh(t)\cos(t) + \cosh(t)\sin(t)). \end{aligned}$$

(c) Wir bezeichnen mit $Y(s)$ die Laplace-Transformation von y. Aus der Ableitungsregel im Originalbereich (Proposition 4.18) folgt

$$\begin{aligned} & s^2Y - sy(0) - y'(0) - 2(sY - y(0)) + 2Y = \mathcal{L}[\cos(t)] + 2\mathcal{L}[\sin(t)] \quad \Leftrightarrow \\ & s^2Y - 2s - 4 - 2(sY-2) + 2Y = \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1} \quad \Leftrightarrow \\ & (s^2-2s+2)Y(s) = 2s + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} = \frac{2s^3+3s+2}{s^2+1} \quad \Leftrightarrow \\ & Y(s) = \frac{2s^3+3s+2}{(s^2-2s+2)(s^2+1)}. \end{aligned}$$

a

(d) Wir bemerken, dass das Integral auf der linken Seite die Faltung $x * (te^{-t})$ ist und damit liefert die Anwendung der Laplace-Transformation auf diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[x * (te^{-t})] = \mathcal{L}[t^3 e^t] \quad \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}[x]\mathcal{L}[te^{-t}] = \mathcal{L}[t^3 e^t] \quad \Leftrightarrow \\
&\mathcal{L}[x](-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-t}] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\mathcal{L}[e^t] \quad \Leftrightarrow \\
&-\mathcal{L}[x]\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{s-1} \quad \Leftrightarrow \\
&\frac{\mathcal{L}[x]}{(s+1)^2} = \frac{6}{(s-1)^4}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x] &= 6\frac{(s+1)^2}{(s-1)^4} = 6\frac{((s-1)+2)^2}{(s-1)^4} = 6\left(\frac{1}{(s-1)^2} + 4\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^4}\right) \\
&= \mathcal{L}\left[6\left(t + 2t^2 + \frac{4}{6}t^3\right)e^t\right] = \mathcal{L}\left[\left(6t + 12t^2 + 4t^3\right)e^t\right]
\end{aligned}$$

und damit gilt

$$x(t) = \left(6t + 12t^2 + 4t^3\right)e^t.$$

[a]Die Lösung y könnte man nun wie folgt berechnen: Wir machen den Ansatz

$$\frac{2s^3 + 3s + 2}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 + 1)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 - 2s + 2}$$

für noch zu bestimmende Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner liefert

$$2s^3 + 3s + 2 = (a + c)s^3 + (-2a + d)s^2 + (2a + c)s + 2b + d$$

und mit einem Koeffizientenvergleich folgt $a = c = 1$, $d = 2$, $b = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s + 2}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{(s - 1) + 3}{(s - 1)^2 + 1} \\
&= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1} + \frac{3}{(s - 1)^2 + 1}.
\end{aligned}$$

und damit gilt

$$y(t) = \cos(t) + e^t \cos(t) + 3e^t \sin(t).$$

3. Partielle Differentialgleichungen **[10 Punkte]**

(a) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + 5\pi^2 u = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\Omega := [0,1] \times [0,1]$.

(i) [**4 Punkte**] Finden Sie mithilfe der Methode der Separation der Variablen eine nichttriviale Lösung $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ von (1).

(ii) [**1 Punkte**] Ist die gefundene Lösung u in (i) eindeutig?

(b) Betrachten Sie nun das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = x^3 + x^2 y^2, & \text{für} \quad (x,y) \in \partial B_1(0), \end{cases} \tag{2}$$

wobei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < 1\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius $r = 1$ bezeichnet.

(I) [**3 Punkte**] Finden Sie den Wert der Lösung u von (2) im Punkt $(0,0)$ und begründen Sie ihre Antwort.

(II) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie das Maximum der Lösung u von (2) auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1\}$.

Hinweis: Sie dürfen die Identitäten

$$\cos^2(\phi) = \frac{1+\cos(2\phi)}{2}, \ \cos^3(\phi) = \frac{3\cos(\phi) + \cos(3\phi)}{4}, \ \cos^4(\phi) = \frac{3 + 4\cos(2\phi) + \cos(4\phi)}{8}$$

ohne Beweis verwenden.

Lösung:

(a) (i) Einfachheitshalber setzen wir $5\pi^2$. Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ erhalten wir

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = -\lambda v(x)w(y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega$. Nach Division durch u folgt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda$$

und damit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} - \lambda = -\nu,$$

wobei $\nu > 0$. Wäre $\nu = 0$, dann müsste $v \equiv 0$ sein aufgrund der homogenen Randbedingungen. Wäre $\nu < 0$, dann würde mittels partieller Integration folgen, dass

$$\begin{aligned} 0 < -\nu \int_0^1 v(x)^2\,dx &= \int_0^1 v''(x)v(x)\,dx = v'(x)v(x)\big|_0^1 - \int v'(x)^2\,dx \\ &= -\int_0^1 v'(x)^2\,dx < 0 \end{aligned}$$

gilt. Damit erhalten wir einen Widerspruch und es muss $\nu > 0$ gelten. Alternativ, kann man dies auch wie folgt sehen: Wenn $\nu < 0$ gelten würde, dann wäre die Lösung von $v''(x) = -\nu v(x)$ eine Linearkombination von $e^{\sqrt{-\nu}x}$ und $e^{-\sqrt{-\nu}x}$, jedoch kann diese Funktion nicht die Randbedingungen erfüllen. Dieselbe Argumentation angewandt auf die Gleichung $w''(y) = (\nu - \lambda)w(y)$ zeigt, dass $\lambda - \nu > 0$ gilt. Also, erfüllen v, w die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} v''(x) &= -\nu v(x), \quad \text{mit} \quad v(0) = v(1) = 0, \\ w''(y) &= -(\lambda - \nu)w(y), \quad \text{mit} \quad w(0) = w(1) = 0. \end{aligned}$$

Lösungen dieser Gleichungen sind

$$v(x) = A_1 \sin(\sqrt{\nu}x) + B_1 \cos(\sqrt{\nu}y), \quad w(y) = A_2 \sin(\sqrt{\lambda - \nu}y) + B_2 \cos(\sqrt{\lambda - \nu}y).$$

Wegen den homogenen Dirichlet-Bedingungen, d.h. $u(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, folgt $B_1 = B_2 = 0$ und $\sqrt{\nu} = n\pi$, $\sqrt{\lambda - \nu} = m\pi$ mit $n, m \in \mathbb{N}$. Somit müssen die Relationen $\nu = n^2\pi^2$ und $5 = (m^2 + n^2)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ gelten, deren Lösungen $(n, m) = (1, 2)$ und $(n, m) = (2, 1)$ sind. Also erhalten wir folgende zwei Lösungen

$$u_1(x, y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) \quad \text{und} \quad u_2(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$

(ii) In Teilaufgabe (i) haben wir gesehen, dass es zwei linear unabhängige Lösungen gibt und somit ist sie nicht eindeutig.

(b) (I) In Polarkoordinaten lautet die Randfunktion

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \cos^3(\phi) + \cos^2(\phi)\sin^2(\phi) = \cos^3(\phi) + \cos^2(\phi)(1 - \cos^2(\phi)) \\ &= \cos^3(\phi) + \cos^2(\phi) - \cos^4(\phi) \\ &= \frac{1}{8}(4 + 4\cos(2\phi) + 6\cos(\phi) + 2\cos(3\phi) - 3 - 4\cos(2\phi) - \cos(4\phi)) \\ &= \frac{1}{8}(1 + 6\cos(\phi) + 2\cos(3\phi) - \cos(4\phi)). \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung u von (2) im Ursprung gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{1}{8}\left(2\pi + 6\sin(\phi)\big|_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\sin(3\pi)\big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\sin(4\phi)\big|_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(II) Aus dem Maximumsprinzip (Korollar 5.11) folgt, dass das Maximum auf dem Rand angenommen wird (da u nicht konstant ist) und somit gilt:

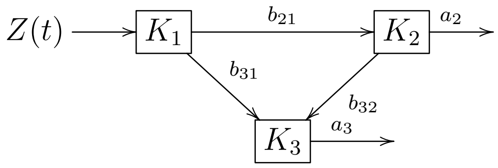
$$\max_{(x,y)\in\overline{B}_1(0)} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial B_1(0)} u(x,y) = \max_{\phi\in[0,2\pi)} g(\phi).$$

Die Funktion g nimmt ihr Maximum z.B. im Punkt $\phi = 0$ an. Also erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in\overline{B}_1(0)} u(x,y) = \frac{1}{8}(1+6+2-1) = 1.$$

4. Kompartiment-Modelle und lineare Differentialgleichungen **[10 Punkte]**

(a) Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell werde beschrieben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t)$$

mit $g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) **[1 Punkte]** Bestimmen Sie aus dem Kompartimentsystem die Matrix A.

(ii) **[2 Punkte]** Seien die Raten $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die Matrix $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) **[2 Punkte]** Sei die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

(b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2t + 3(1+t)e^t. \tag{3}$$

(I) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die zum homogenen Problem gehörende Lösung.

(II) **[1 Punkte]** Stellen Sie das zum homogenen Problem zugehörige DGL–System

$$Y'(t) = AY(t)$$

auf.

(III) **[2 Punkte]** Finden Sie die allgemeine Lösung von (3).

Lösung:

(a) (i) Die Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -(b_{31}+b_{21}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2+b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Für die gegebenen Raten hat die Matrix A dir Form

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
D := T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) Setze $x(t) = T^{-1}y(t)$. Es gilt $y(t) = Tx(t)$, $y'(t) = Tx'(t)$ und damit erhalten wir

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) \implies Tx'(t) = A \cdot Tx(t) + g(t)$$

$$\implies x'(t) = (T^{-1}AT) \cdot x(t) + T^{-1}g(t) = D \cdot x(t) + h(t),$$

wobei $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2, -2, 2)^\top = e^{-t}k$.
Da D diagonal ist, sind die Differentialgleichungen entkoppelt. Diese haben die Form $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + k_i e^{-t}$, und können mittels Variation der Konstanten gelöst werden. Ansatz: $x_i(t) = C(t)e^{\lambda_i t}$.

$$\begin{aligned}
(C'(t) + \lambda_i C(t))e^{\lambda_i t} &= \lambda_i C(t)e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t} \\
C'(t)e^{\lambda_i t} &= k_i e^{-t} \\
C'(t) &= k_i e^{-(1+\lambda_i)t} \\
\text{Falls } 1 + \lambda_i \neq 0: \quad C(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-(1+\lambda_i)t} + const. \\
x_i(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t} \\
\text{Falls } 1 + \lambda_i = 0: \quad C'(t) &= k_i e^0 = k_i \implies C(t) = k_i t + const. \\
x_i(t) &= k_i t e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} -2te^{-t} + c_1 e^{-t} \\ 8e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} \\ -4e^{-t} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2t \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}.
\end{aligned}$$

Alternativ kann $x(t)$ auch direkt durch Integration mittels der Variation der Konstanten Formel aus Aufgabe 2, Serie 5 bestimmt werden. Mit $y(t) = Tx(t)$ haben wir nun

$$y(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} t \\ -2t-8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}.$$

(b) (I) Wir verwenden den Exponentialansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Einsetzen in (3) ergibt:

$$(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)e^{\lambda t} = 0.$$

Da $e^{\lambda t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden und wir erhalten die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Wir sehen dass $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2$ Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind. Eine Polynomdivision zeigt, dass λ_0 eine doppelte Nullstelle ist. Somit erhalten wir die allgemeine Lösung (Satz 2.15)

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t}, \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

(II) Wir setzen $Y(t) = (y(t), y'(t), y''(t))^\top$ und wegen $y''' = 4y'' - 5y' + 2y$ erhalten wir

$$Y'(t) = (y'(t), y''(t), y'''(t))^\top = (y'(t), y''(t), 4y'' - 5y' + 2y)^\top.$$

Daraus folgt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(III) Wir bestimmen zuerst eine partikuläre Lösung für den linearen Teil der Inhomogenität und bestimmen anschliessend eine Funktion welche den Term mit der Exponentialfunktion erzeugt. Wir machen für den linearen Teil den Ansatz $y_1(t) = a + bt$. Setzen wir diese in die Differentialgleichung ein, dann erhalten wir

$$5b - 2(a + bt) = 2t \quad \Leftrightarrow \quad (5b - 2a) = 2(1+b)t.$$

Wählen wir $b = -1, a = -5/2$ dann ist die Bedingung erfüllt und $y_1(t) = -(5/2 + t)$ erzeugt den linearen Term. Da nach Teilaufgabe (I) die Funktionen e^t, te^t Lösungen der homogenen Gleichung sind, machen wir den Ansatz $y_2(t) = ct^2e^t + dt^3e^t$. Es gilt

$$\frac{d}{dt}(t^2e^t) = (2t + t^2)e^t,\ \frac{d^2}{dt^2}(t^2e^t) = (2 + 4t + t^2)e^t,\ \frac{d^3}{dt^3}(t^2e^t) = (6 + 6t + t^2)e^t$$
$$\frac{d}{dt}(t^3e^t) = (3t^2 + t^3)e^t,\ \frac{d^2}{dt^2}(t^3e^t) = (6t + 6t^2 + t^3)e^t,\ \frac{d^3}{dt^3}(t^3e^t) = (6 + 18t + 9t^2 + t^3)e^t.$$

Setzen wir t^2e^t, t^3e^t in die linke Seite von Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\left((6+6t+t^2)-4(2+4t+t^2)+5(2t+t^2)-2t^2\right)e^t=-2e^t$$

und

$$\left((6+18t+9t^2+t^3)-4(6t+6t^2+t^3)+5(3t^2+t^3)-2t^3\right)e^t=(-6t+6)e^t$$

Damit folgt

$$y_2'''-4y_2''+5y_2'-2y_2=[(-2c+6d)-6dt]e^t.$$

Wählen wir $c=-3, d=-1/2$, dann ist der erhaltene Ausdruck gleich $3(1+t)e^t$, wie gewünscht. Somit ist die allgemeine Lösung von (3) gegeben durch

$$y(t)=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{2t}-\frac{5}{2}-t-3t^2e^t-\frac{1}{2}t^3e^t,\quad \text{mit}\quad C_1,C_2,C_3,C_4\in\mathbb{R}.$$