D–HEST / Lehrdiplom Mathematik

Prüfung Mathematik III

401-0293-00S

Bitte noch nicht umblättern!

Aufgaben

1. Fourierreihen **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die $2\pi-$periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(a) [**2 Punkte**] Skizzieren Sie den Graph der Funktion $x \mapsto f(x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(c) Wir bezeichnen mit $D \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Punkte $x \in \mathbb{R}$ in welchen die Fourierreihe punktweise gegen f konvergiert.

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) [**1 Punkte**] Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe von f für $x \notin D$.

Begründen Sie ihre Antworten.

(d) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2. Laplace-Transformation **[10 Punkte]**

(a) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = t^{3/2} + (t-3)^2\sigma(t-3),$$

wobei $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, direkt aus der Definition der Laplace-Transformation.

(b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{s^2}{s^4+4}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Identität $s^4 + 4 = ((s-1)^2+1)((s+1)^2+1)$ ohne Beweis verwenden.

(c) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + 2y = \cos(t) + 2\sin(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

(d) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie die Lösung $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgender Gleichung

$$\int_0^t x(s)(t-s)e^{-(t-s)}\, ds = t^3 e^t,$$

wobei $t \geq 0$.

3. Partielle Differentialgleichungen **[10 Punkte]**

(a) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + 5\pi^2 u = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

wobei $\Omega := [0,1] \times [0,1]$.

(i) [**4 Punkte**] Finden Sie mithilfe der Methode der Separation der Variablen eine nichttriviale Lösung $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ von (1).

(ii) [**1 Punkte**] Ist die gefundene Lösung u in (i) eindeutig?

(b) Betrachten Sie nun das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \text{für} \quad (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = x^3 + x^2 y^2, & \text{für} \quad (x,y) \in \partial B_1(0), \end{cases} \tag{2}$$

wobei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| < 1\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius $r = 1$ bezeichnet.

(I) [**3 Punkte**] Finden Sie den Wert der Lösung u von (2) im Punkt $(0,0)$ und begründen Sie ihre Antwort.

(II) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie das Maximum der Lösung u von (2) auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x| \leq 1\}$.

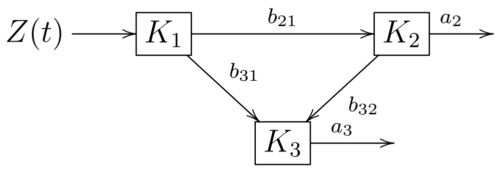
Hinweis: Sie dürfen die Identitäten

$$\cos^2(\phi) = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}, \ \cos^3(\phi) = \frac{3\cos(\phi) + \cos(3\phi)}{4}, \ \cos^4(\phi) = \frac{3 + 4\cos(2\phi) + \cos(4\phi)}{8}$$

ohne Beweis verwenden.

4. Kompartiment-Modelle und lineare Differentialgleichungen **[10 Punkte]**

(a) Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell werde beschrieben durch

$$y'(t) = Ay(t) + g(t)$$

mit $g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) **[1 Punkte]** Bestimmen Sie aus dem Kompartimentsystem die Matrix A.

(ii) **[2 Punkte]** Seien die Raten $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die Matrix $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) **[2 Punkte]** Sei die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

(b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2t + 3(1+t)e^t. \tag{3}$$

(I) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die zum homogenen Problem gehörende Lösung.

(II) **[1 Punkte]** Stellen Sie das zum homogenen Problem zugehörige DGL–System

$$Y'(t) = AY(t)$$

auf.

(III) **[2 Punkte]** Finden Sie die allgemeine Lösung von (3).