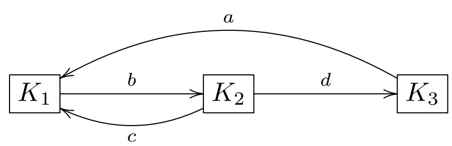
Aufgabe 1 (12 Punkte)

Das dargestellte 3-Box-Modell beschreibe die Entwicklung einer Substanz in den Organen K_1, K_2 und K_3:



Das zugehörige DGL-System sei $y'(t) = Ay(t)$ mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \text{ und } A \in M_{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix A.

(b) Seien nun $d = 0$ und $0 < a, b, c < 1$.

  (i) Zeigen Sie, dass es eine nicht triviale stationäre Lösung y_∞ gibt.

  (ii) Berechnen Sie alle stationären Lösungen.

(c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des DGL-Systems für den Fall $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = 0$.

Für welche Anfangsdaten verschwindet die Substanz für $t \to \infty$ aus allen Organen?

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Wir betrachten ein System mit zwei nicht linearen DGL:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) + y_1(t)y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_1^2(t)y_2(t) \end{aligned} \qquad (*)$$

und schreiben kurz $y' = F(y)$ für $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ und

$$F : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y_2 + y_1 y_2 \\ y_1 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung des Systems $(*)$ ist.

Bestimmen Sie alle weiteren stationären Lösungen.

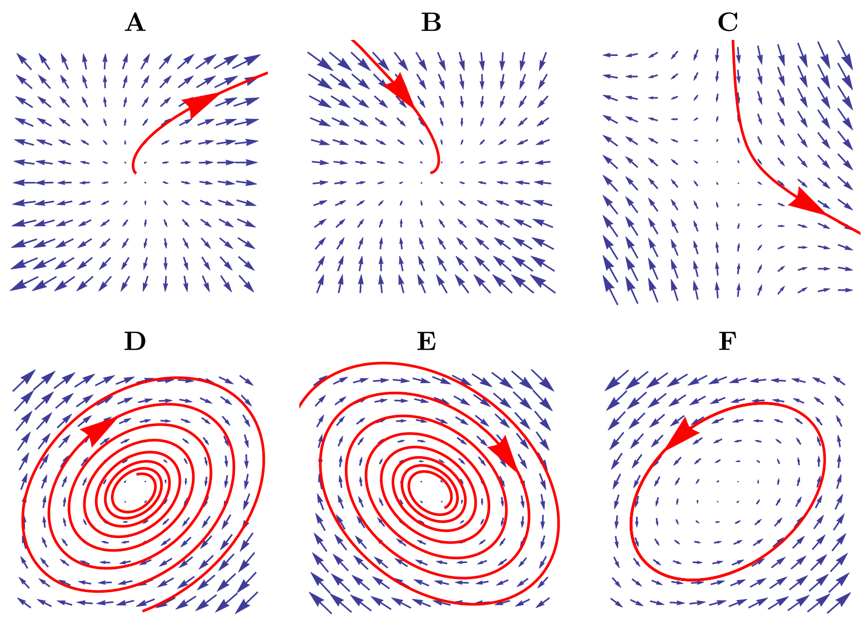
(b) Wir untersuchen das Verhalten der Lösung von $(*)$ in der Nähe von $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des **linearen** Systems

$$h' = DF(y_\infty)h.$$

Berechnen Sie die Matrix $A = DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(1,1)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(1,1)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(1,1)}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(1,1)}{\partial y_2} \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(d) Welche der folgenden Abbildungen beschreibt das Verhalten einer Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ von $(*)$ in der Nähe der stationären Lösung $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?



(e) Sei nun $y' = G(y)$ ein anderes 2×2-System nicht linearer DGL mit stationärer Lösung y_∞ und $DG(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$.

Für welche Parameterwerte β sieht die Lösung bei y_∞ qualitativ aus wie in Abbildung **D** oben?

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Um die Folgen eines Unfalls durch Unterkühlung nach dem Sturz in eiskaltes Wasser zu modellieren wird folgende Wärmeleitungsgleichung betrachtet:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad \text{für } x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R} \tag{PDE}$$

Die Anfangstemperatur im Körperinneren beträgt $37°$, das heisst es gilt die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 37 \qquad \text{für } 0 < x < \pi \tag{AB}$$

Der Körper wird dann der Temperatur $T = 0°$ ausgesetzt, das heisst es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \text{ und } u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \tag{RB}$$

(a) Bestimmen Sie durch den Separationsansatz $u(x,t) = \sin(cx)g(t)$ alle Lösungen dieser Form von (PDE), welche den Randbedingungen (RB) genügen.

(b) Durch Superposition der in (a) gefundenen Lösungen bestimmen Sie nun diejenige Lösung von (PDE) und (RB), welche auch die Anfangsbedingung (AB) erfüllt.

Hinweis: Setzen Sie die Anfangsbedingung (AB) auf dem Intervall $0 < x < \pi$ als ungerade Funktion 2π-periodisch fort, und berechnen Sie die Fourier-Reihe dieser Funktion.

(c) Beantworten Sie folgende Frage, indem Sie nur den ersten Term der Lösung aus Teilaufgabe (b) verwenden: Zu welchem Zeitpunkt t ist die Körperkerntemperatur $u(\frac{\pi}{2},t)$ auf $30°$ gesunken?