Aufgabe 1 (12 Punkte)

Ein Medikament wirkt in drei Organen O_1, O_2, O_3. Seine Menge zur Zeit t im Organ O_k wird mit $x_k(t)$ bezeichnet, und die Wechselwirkung wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{cases} x_1' = -a_1 x_1 + a_3 x_3 \\ x_2' = -a_2 x_2 + a_1 x_1 \\ x_3' = -a_3 x_3 + a_2 x_2 \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) Zeichnen Sie ein Box-Modell der drei Organe und beschriften Sie es mit Pfeilen und den Parametern a_i, so dass es dem System $(*)$ entspricht.

(b) Verwenden Sie ab hier die Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 6$ und schreiben Sie das System $(*)$ in Matrixform als $x' = Ax$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Schreiben Sie die Matrix A explizit hin. Zeigen Sie dass $\bar{x} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ des Systems $(*)$, für welche $x(10) = \bar{x}$ gilt. ($\bar{x}$ ist der Eigenvektor aus Teilaufgabe (b).)

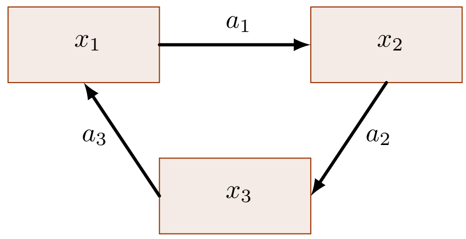
(e) Die Summe $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ von Lösungen von $(*)$ ist

- ☐ exponentiell wachsend in t,
- ☐ exponentiell fallend in t,
- ☐ konstant,
- ☐ oszillierend in t.

(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

Solution

(a) The box system associated is:



(b) We can represent the system as:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & a_3 \\ a_1 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Additionally we have that $\bar{x}$ is an eigenvector because

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4\,\bar{x}$$

(c) The characteristic polynomial is given by

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 6 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -6-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(1+\lambda)(2+\lambda)(6+\lambda) + 12 \\ &= -\lambda^3 - 9\lambda^2 - 20\lambda - 12 + 12 \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 9\lambda + 20) \\ &= -\lambda(\lambda+4)(\lambda+5). \end{aligned}$$

Hence the eigenvalues are 0, -4 and -5 (see also part (b)).

(d) We have that the solution of the system is given by

$$x(t) = C_1 v_1 + C_2 e^{-5t} v_2 + C_3 e^{-4t} \bar{x},$$

where v_1 and v_2 are the eigenvectors associated with the eigenvalues 0 and -5 respectively. Given that $x(10) = \bar{x}$ we have $C_1 = C_2 = 0$, and the solution is given by

$$x(t) = e^{-4(t-10)} \bar{x}.$$

(e) The sum of the rows in A is zero, hence $x_1 + x_2 + x_3$ is constant because

$$(x_1 + x_2 + x_3)' = -a_1 x_1 + a_3 x_3 - a_2 x_2 + a_1 x_1 - a_3 x_3 + a_2 x_2 = 0.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$4y''(x) + y(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi] \tag{ODE}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $4y''(x) + y(x) = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (ODE) mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx),$$

indem Sie die Funktion $|x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine 2π-periodische Fourier-Reihe entwickeln.

(c) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (ODE), für welche $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt.

Solution

(a) Obviously

$$y_H(x) = A\sin(x/2) + B\cos(x/2).$$

(b) First write the Fourier series for the function $|x|$ (as in Vorlesung 7):

- Note that $|x|$ is even, so all b'_n are zero.
- For $n = 0$,

$$a'_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

- For $n \neq 0$ we use integration by parts:

$$\begin{aligned}
a'_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{if } n > 0 \text{ even} \\ \frac{-4}{n^2\pi} & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

Then write both sides of (ODE) as Fourrier series:

$$4\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 A_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nx).$$

Identify the Fourrier coefficients of both sides by paying special attention to the $n = 0$ term:

$$\begin{aligned}
A_n &= a'_n/(1 - 4n^2) \text{ for } n \neq 0 \\
A_0 &= a'_0/2 = \pi/2.
\end{aligned}$$

(c) The general solution writes:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A\sin\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}\cos((2n+1)x).$$

Note that $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ for all n. Therefore condition $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ implies that

$$
\begin{aligned}
-\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} &= 0 \\
\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} &= 0
\end{aligned}
$$

Solve the linear system and get $A = 0$ and $B = -\pi/\sqrt{2}$.

To conclude, $y(x) = -\pi/\sqrt{2}\cos(x/2) + y_P(x)$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die Schwingungen eines Stimmbandes (Ligamentum vocale) werden modelliert durch die Wellengleichung

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad \text{für } x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R} \tag{PDE}$$

Die Enden des Stimmbandes sind fixiert bei $x = 0$ und $x = \pi$, das heisst es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \text{ und } u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \tag{RB}$$

(a) Bestimmen Sie durch den Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ alle solchen Lösungen von (PDE), welche in der x-Variable 2π-periodisch sind und den Randbedingungen (RB) genügen.

(b) Durch Superposition bestimmen Sie nun diejenige Lösung von (PDE) und (RB), welche die Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \sin(2x) + 2\sin(4x) \\
u_t(x,0) &= 3\sin(3x) + \sin(5x)
\end{aligned}
$$

erfüllt.

Solution

(a) If $u(x,t) = f(x)g(t)$ is a solution then

$$f''(x)g(t) = f(x)g''(t) \text{ and hence } \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = \kappa$$

with κ constant. Only $\kappa = -n^2 < 0$ leads to periodic solutions for f, namely $f(x) = C_1\cos(nx) + C_2\sin(nx)$. The boundary condition $f(0) = 0$ gives $C_1 = 0$, and $f(\pi) = 0$ implies $n \in \mathbb{N}$. The corresponding solution for $g(t)$ is $g(t) = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)$. Finally we have

$$u(x,t) = f(x)g(t) = \sin(nx)\left(A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right).$$

(b) Using the superposition principle we can write the solution u as

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(nx) \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\right).$$

Given the first initial condition:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \sin(nx) = u(x,0) = \sin(2x) + 2\sin(4x),$$

we can conclude that $A_2 = 1$, $A_4 = 2$ and $A_n = 0$ if $2 \neq n \neq 4$. And using the second initial condition

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} nB_n \sin(nx) = u_t(x,0) = 3\sin(3x) + \sin(5x),$$

we can conclude that $B_3 = 1$, $B_5 = \frac{1}{5}$ and $B_n = 0$ if $3 \neq n \neq 5$. Then the solution is

$$u(x,t) = \sin(2x)\cos(2t) + \sin(3x)\sin(3t) + 2\sin(4x)\cos(4t) + \frac{1}{5}\sin(5x)\sin(5t).$$