Aufgabe 1 (12 Punkte)

Ein Medikament wirkt in drei Organen O_1, O_2, O_3. Seine Menge zur Zeit t im Organ O_k wird mit $x_k(t)$ bezeichnet, und die Wechselwirkung wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{cases} x_1' = -a_1x_1 + a_3x_3 \\ x_2' = -a_2x_2 + a_1x_1 \\ x_3' = -a_3x_3 + a_2x_2 \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) Zeichnen Sie ein Box-Modell der drei Organe und beschriften Sie es mit Pfeilen und den Parametern a_i, so dass es dem System $(*)$ entspricht.

(b) Verwenden Sie ab hier die Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = 6$ und schreiben Sie das System $(*)$ in Matrixform als $x' = Ax$, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Schreiben Sie die Matrix A explizit hin. Zeigen Sie dass $\bar{x} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ des Systems $(*)$, für welche $x(10) = \bar{x}$ gilt. ($\bar{x}$ ist der Eigenvektor aus Teilaufgabe (b).)

(e) Die Summe $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ von Lösungen von $(*)$ ist

- ☐ exponentiell wachsend in t,
- ☐ exponentiell fallend in t,
- ☐ konstant,
- ☐ oszillierend in t.

(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$4y''(x) + y(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi] \tag{ODE}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $4y''(x) + y(x) = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (ODE) mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx),$$

indem Sie die Funktion $|x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine 2π-periodische Fourier-Reihe entwickeln.

(c) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (ODE), für welche $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die Schwingungen eines Stimmbandes (Ligamentum vocale) werden modelliert durch die Wellengleichung

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad \text{für } x \in (0,\pi),\ t \in \mathbb{R} \tag{PDE}$$

Die Enden des Stimmbandes sind fixiert bei $x = 0$ und $x = \pi$, das heisst es gelten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0 \text{ und } u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R} \tag{RB}$$

(a) Bestimmen Sie durch den Separationsansatz $u(x,t) = f(x)g(t)$ alle solchen Lösungen von (PDE), welche in der x-Variable 2π-periodisch sind und den Randbedingungen (RB) genügen.

(b) Durch Superposition bestimmen Sie nun diejenige Lösung von (PDE) und (RB), welche die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(2x) + 2\sin(4x) \\ u_t(x,0) &= 3\sin(3x) + \sin(5x) \end{aligned}$$

erfüllt.