Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,1}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ 2 \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) $y_{\infty,1} = -2$

(B) $y_{\infty,1} = -\frac{1}{2}$

(C) **TRUE:** $y_{\infty,1} = 2$

(D) $y_{\infty,1} = \frac{1}{2}$

Lösung:

Die korrekte Antwort ist $y_{\infty,1} = 2$. Aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y_\infty - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt, dass

$$y_\infty = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alternative ohne A^{-1}:
Setze $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ 2 \end{pmatrix}$ und rechne: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_{\infty,1} - 4 \\ y_{\infty,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Aus der zweiten Gleichung folgt direkt, dass $y_{\infty,1} = 2$. Der Wert $y_{\infty,1} = 2$ erfüllt auch die erste Gleichung.

1.MC2 [1 Punkt] Sei $V = \mathcal{P}_{\leq 4}$ der Vektorraum der Polynom-Funktionen vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten. Welche Dimension hat der Unterraum U, welcher von den Polynomen

$$\left\{ p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x^2 - 1,\ p_4(x) = x^3 + 4 \right\}$$

erzeugt wird?

(A) $\dim_{\mathbb{R}} U = 1$

(B) $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$

(C) $\dim_{\mathbb{R}} U = 4$

(D) **TRUE:** $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$

Lösung:

Die korrekte Antwort ist $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$. Denn $p_3 = p_2 - p_1$, und (p_1, p_2, p_3) sind linear unabhängig.

1.MC3 [1 Punkt] Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Dann ist der fehlende Eigenwert $\lambda_3 \dots$

(A) $\lambda_3 = 4$

(B) **TRUE:** $\lambda_3 = 3$

(C) $\lambda_3 = 2$

(D) $\lambda_3 = 1$

Lösung:

Die Spur der Matrix A ist 6. Da die Spur exakt die Summe der Eigenwerte von A ist, und wir zwei Eigenwerte schon gegeben haben, ist der gesuchte Eigenwert $\lambda_3 = 3$, denn dann ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$.

Alternative: Aus der Determinante folgt, dass $6 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2\lambda_3$.

1.MC4 [1 Punkt] Welches J kommt als Jordan Normalform von A in **1.MC3 oben** infrage?

(A) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

(B) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

(C) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

(D) **TRUE:** $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Lösung:

Da die Matrix A diagonalisierbar ist, muss J eine Diagonalmatrix sein.

1.A1 [2 Punkte] Sei $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ aus **1.MC4 oben**. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y' = Jy$.

Lösung:

Die allgemeine Lösung dieses Systems ist $t \mapsto e^{tJ}C$ für ein $C \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Da die Matrix J in

Jordan-Normalform ist gilt, dass $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$. Damit bilden

$$t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

eine Basis von $\mathcal{L}_J$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

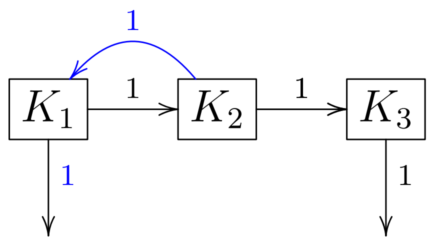
1.A2 [2 Punkte] Die Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ definiert ein lineares DGL-System $y' = By$.

Dieses modelliert die Entwicklung in drei Kompartimenten K_1, K_2 und K_3.

Vervollständigen Sie das zugehörige Kompartiment-System **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Das heisst: Geben Sie fehlende Pfeile (mit Richtung) oder Beschriftungen an.

Lösung:



- Es fehlt die Beschriftung “1” vom Pfeil der von K_1 hinaus geht.
- Es fehlt der Pfeil der von K_2 nach K_1 geht.
- Es fehlt die Beschriftung “1” vom Pfeil der von K_2 nach K_1 geht.

1.A3 [6 Punkte] Sei nun $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Seien $v_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2(t) = \begin{pmatrix} X \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten X, Y und Z, sodass $t \mapsto v_1(t), t \mapsto v_2(t)$ und $t \mapsto v_3(t)$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$ des Systems $y' = Jy$ ergeben.

Lösung:

Aus der Formel für das Matrixexponential von Jordanblöcken gilt, dass

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von $t \mapsto e^{tJ}$ sind eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}_J$, also ist

$$X = 0, \quad Y = te^{2t} \quad \text{und} \quad Z = e^{2t}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A3.**

Aufgabe 2

2.MC1 [1 Punkt] Sei f die Funktion mit $f(x) = d \cdot x^2$, einer Konstanten d und $x \in [-\pi, \pi[$.

Für welches d hat die Fortsetzung den Fourier-Koeffizienten $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$?

(A) **TRUE:** $d = \frac{1}{2}$

(B) $d = -\frac{1}{2}$

(C) $d = 2$

(D) $d = -2$

Lösung:

Die Lösung ist $d = \frac{1}{2}$. Es muss gelten, dass

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{d}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{d}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{d}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2d\pi^2}{3} \stackrel{!}{=} \frac{\pi^2}{3}$$

gelten. Also ist $d = \frac{1}{2}$.

2.MC2 [1 Punkt] Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe einer Funktion f, für die

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \text{ und } b_k = \frac{3(-1)^k}{k^2}, \qquad k \geq 1$$

bekannt sind.

Sei $f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$ die Fourier-Reihe der Ableitungsfunktion f''. Bestimmen Sie den **vierten** Fourier-Koeffizienten A_4 dieser Fourier-Reihe.

(A) $A_4 = 2$

(B) **TRUE:** $A_4 = 1$

(C) $A_4 = -1$

(D) $A_4 = -2$

Lösung:

Die Lösung ist $A_4 = 1$. Durch zweifaches Ableiten der Fourier-Reihe von f erhalten wir

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 a_k \cos(kx) - k^2 b_k \sin(kx) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx).$$

Mit Koeffizientenvergleich gilt also, dass $A_k = -k^2 a_k$. Somit ist

$$A_4 = -16a_4 = -16\frac{(-1)^{4+1}}{4^2} = 1.$$

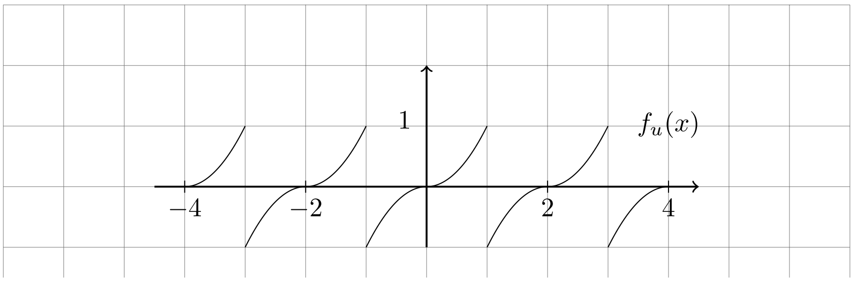
2.A1 [**4 Punkte**] Sei f die Funktion mit $f(x) = x^2$ und $0 \leq x < 1$.

(i) Skizzieren Sie den Graphen der ungeraden Fortsetzung f_u für $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1** und geben Sie dort auch die Periode von f_u an.

Lösung:

Die Periode ist 2.

Der Graph sollte so aussehen



(ii) Berechnen Sie den komplexen Fourier-Koeffizienten c_0 dieser Funktion f_u.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Lösung:

Die ungerade Fortsetzung f_u von f ist eine ungerade Funktion und damit ist $a_k = 0$ für alle k, also ist insbesondere $a_0 = 0$. Damit ist $c_0 = a_0/2$.

Alternative: Man berechnet direkt das Integral

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_u(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_u(x)dx = 0, \end{aligned}$$

da f_u eine ungerade Funktion ist.

2.A2 [**5 Punkte**] Gegeben sei $(\mathcal{P}_{\leq 3}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

(i) Für eine Konstante c bilden die Vektoren

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2 - 1/3, p_4(x) = x^3 - cx\}$$

eine **orthogonale** Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie c.

Lösung:

Es muss gelten, dass $\langle p_2, p_4\rangle = 0$, also

$$0 = \langle p_2, p_4\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot(x^3 - cx)dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx - \int_{-1}^{1} cx^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} - c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{5} - c\frac{2}{3}.$$

Somit muss $c = \dfrac{3}{5}$ sein.

(ii) Für den Vektor $q(x) = x^2 - x \in \mathcal{P}_{\leq 3}$ sei $[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor bezüglich der **Basis $\mathcal{B}$ in Teilaufgabe (i)**. Bestimmen Sie die fehlenden Einträge X und Y.

Lösung:

Wir suchen Koeffizienten X und Y mit

$$x^2 - x = X \cdot p_1(x) + Y \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) + 0 \cdot p_4(x) = X \cdot 1 + Y \cdot x + 1 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Schreiben wir $x^2 - x = \frac{1}{3} - x + \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ sehen wir direkt, dass

$$X = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad Y = -1.$$

Alternative:

Aus der Bilinearität des Skalarprodukts und der Orthogonalität der Vektoren p_1, p_2, p_3 und p_4 folgt, dass

$$X = \frac{\langle q, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} \quad \text{und} \quad Y = \frac{\langle q, p_2\rangle}{\langle p_2, p_2\rangle}.$$

Wir berechnen also

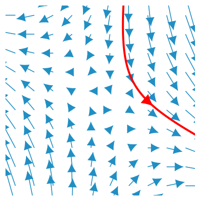
$$\begin{aligned}
\langle q, p_1\rangle &= \int_{-1}^{1} (x^2 - x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \\
\langle q, p_2\rangle &= \int_{-1}^{1} (x^2 - x) x dx = -\int_{-1}^{1} x^2 dx = -\frac{2}{3} \\
\langle p_1, p_1\rangle &= \int_{-1}^{1} dx = 2 \\
\langle p_2, p_2\rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $X = \dfrac{1}{3}$ und $Y = -1$ ist.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Aufgabe 3

3.MC1 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} d & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Für welches d sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



(A) $d = 0$

(B) $d = -3$

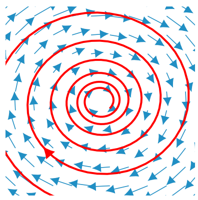
(C) **TRUE:** $d = 3$

(D) $d = -\dfrac{1}{3}$

Lösung:

Die Lösung ist $d = 3$. Für solch ein Verhalten muss die Matrix $DF(y_\infty)$ zwei reelle EW (hier auf der Diagonalen) mit unterschiedlichem Vorzeichen haben.

3.MC2 [1 Punkt] Sei $y' = F(y)$ ein nichtlineares System mit stationärer Lösung y_∞ und Jacobi-Matrix $DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & \beta \end{pmatrix}$. Für welches β sieht die Lösungkurve in der Nähe von y_∞ qualitativ folgendermassen aus?



(A) **TRUE:** $\beta = -2$

(B) $\beta = 0$

(C) $\beta = -4$

(D) $\beta = 2$

Lösung:

Die Lösung ist $\beta = -2$. Für einen solchen Verlauf muss die Matrix $DF(y_\infty)$ komplexe Eigenwerte $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$ haben, mit $a < 0, b \neq 0$: Die Bedingung $a < 0$ stellt sicher, dass die Lösung sich mit wachsendem t zum Ursprung hin bewegt, und $b \neq 0$, dass die Lösung dies spiralförmig tut.

Die Eigenwerte der Matrix $DF(y_\infty)$ sind $\lambda_i = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 16})$. Damit der Realteil negativ ist, muss $\beta < 0$ sein, und damit die Lösungen komplex sind muss der Radikand $\beta^2 - 16 < 0$ sein. Dies ist der Fall für $\beta^2 < 16$. Beide Bedingungen gleichzeitig sind also erfüllt für $-4 < \beta < 0$.

Somit ist $\beta = -2$

3.MC3 [1 Punkt] In einem Räuber-Beute-Modell beschreibe x die Räuberpopulation und y die Beutepopulation:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{3} \cdot x(t) + \frac{1}{30} \cdot x(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{5} \cdot y(t) \left(10 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right) - \frac{1}{10} \cdot x(t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

Der Räuberbestand zu Beginn sei $x(0) = 15$. Für welche Beute $y(0)$ bleibt y konstant?

(A) $y(0) = 50$
(B) **TRUE:** $y(0) = 10$
(C) $y(0) = 100$
(D) $y(0) = 150$

Lösung:

Die Lösung ist $y(0) = 10$. Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems mit $y(t) = y_\infty$ konstant und $x(0) = 15$ ist. Aus der ersten Gleichung folgt, dass

$$x'(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{30} y_\infty\right) \cdot x(t)$$

gilt. Also folgt mit der Anfangsbedingung $x(0) = 15$, dass

$$x(t) = 15 e^{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{30} y_\infty\right) t}.$$

Setzen wir das in die zweite Gleichung für $y(t) = y_\infty$ ein, erhalten wir

$$0 = \frac{1}{5} y_\infty \left(10 - \frac{1}{4} y_\infty\right) - \frac{1}{10} 15 e^{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{30} y_\infty\right) t} y_\infty.$$

Damit das für alle t gilt, muss $y_\infty = 10$ gelten.

3.MC4 [1 Punkt] Seien $x(0) = 0$ und $y(0) = 20$ im Modell **von 3.MC3**. Was passiert?

(A) Die Beute reduziert sich bis an eine Grenze $y_\infty > 0$.
(B) Die Beute wächst unbegrenzt.
(C) **TRUE:** Die Beute wächst bis an eine Grenze $y_\infty > 0$.
(D) Die Beute stirbt aus.

Lösung:

Die Lösung ist, dass die Beute wächst bis an eine Grenze $y_\infty > 0$. Mit $x(0) = 0$ ist auch konstant $x(t) = 0$ für alle t.

Damit vereinfacht sich die zweite Gleichung zur Logistischen DGL:

$$y'(t) = \frac{1}{5} \cdot y(t) \cdot \left(10 - \frac{1}{4} \cdot y(t)\right).$$

Wir lesen ab, dass $y'(0) > 0$ für $y(0) = 20$, also nimmt die Beute zunächst zu. Da $y(t) > 0$ ist das Vorzeichen der rechten Seite durch die Klammer als zweiter Faktor bestimmt:

Es ist $10 - \frac{1}{4}y(t) > 0$ für $y(t) < 40$ und $y_\infty = 40$ eine stationäre Lösung, die weder über- noch unterschritten werden kann.

3.A1 [**2 Punkte**] Gegeben sei das System $y' = F(y)$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ und } F(y) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 + y_1^2 \\ \cos(y_1) + \sin(y_2) \end{pmatrix}.$$

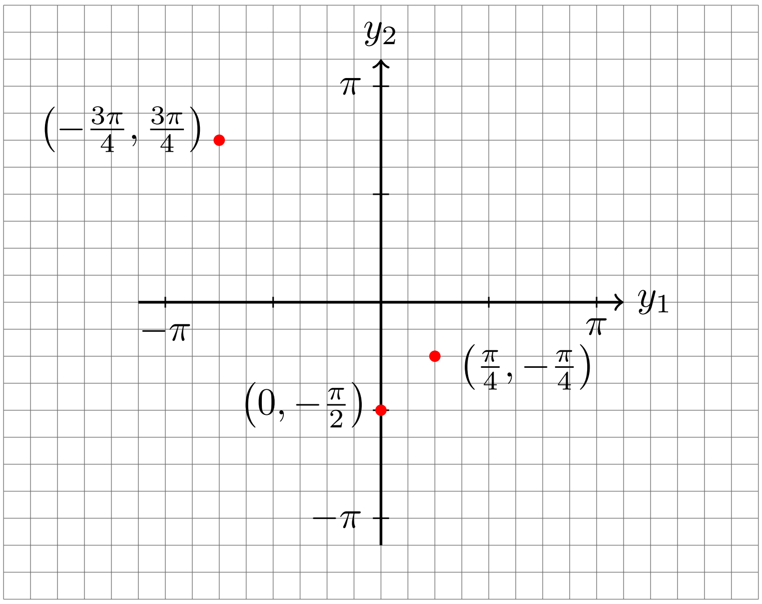
Im Quadrat $\{(x, y) | -\pi \leq x \leq \pi,\ -\pi \leq y \leq \pi\}$ hat das System drei Fixpunkte.

Zeichnen Sie **zwei von diesen** in das Koordinatensystem **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Lösung:

Die drei Fixpunkte sind (ähnlich wie in Serie 8, Aufgabe 1)

$$(y_1, y_2) = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad (y_1, y_2) = \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right).$$



3.A2 [**4 Punkte**] Gegeben sei folgendes System $\begin{pmatrix} S' \\ I' \end{pmatrix} = F(S, I)$ mit $c, w > 0$ konstant und:

$$\begin{aligned} S'(t) &= wS(t)I(t) - wI(t), \\ I'(t) &= -cS(t)I(t) + wS(t). \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie den Fixpunkt (S_∞, I_∞) mit $I_\infty > 0$.

Lösung:

Der Fixpunkt ist $(S_\infty, I_\infty) = (1, w/c)$.

(ii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $DF(S_\infty, I_\infty)$, und beschreiben Sie das Verhalten einer Lösung, welche nahe beim Fixpunkt (S_∞, I_∞) startet?

Lösung:

Die Vektorfeld F ist $F(S,I) = \begin{pmatrix} wSI - wI \\ -cSI + wS \end{pmatrix}$ und weiter $DF(S,I) = \begin{pmatrix} wI & wS - w \\ -cI + w & -cS \end{pmatrix}$ und damit

$$DF(S_\infty, I_\infty) = \begin{pmatrix} w^2/c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

für jeden Fixpunkt. Also hat $DF(S_\infty, I_\infty)$ die Eigenwerte w^2/c und $-c$.

Hier lässt sich der Satz von Hartman-Grobman anwenden, da $c, w > 0$ und damit der Realteil der Eigenwerte von $DF(S_\infty, I_\infty)$ verschieden von 0 sind. Somit approximiert approximiert die Lösung des linearisierten Systems die wahre Lösung der nichtlinearern Gleichung in der Nähe von (S_∞, I_∞). Da $w^2/c > 0$ und $-c < 0$ ist $(1, w/c)$ ein Sattelpunkt.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Aufgabe 4

Sei $\lambda > 0$ eine Konstante. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \lambda u_{xx} \tag{PDE}$$

auf dem Stab $0 < x < \pi$ mit Randbedinungen

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{für } t \geq 0 \qquad \text{(Randbedingung)}$$
$$u(0,x) = x \quad \text{für } 0 < x < \pi. \qquad \text{(Anfangsbedingung)}$$

4.A1 [3 Punkte] Machen Sie den Separationsansatz $u(t,x) = f(t)g(x)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen f und g.

Lösung:

Es gilt, dass

$$f'(t)g(x) = u_t = \lambda u_{xx} = \lambda f(t)g''(x)$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda f(t)g(x)}$ erhält man

$$\frac{f'(t)}{\lambda f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von x abhängt, müssen beide Seiten konstant $-\omega^2$ sein.

Die beiden gesuchten Differentialgleichungen sind also

$$f'(t) = -\lambda\omega^2 f(t) \quad \text{und} \quad g''(x) = -\omega^2 g(x).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**

4.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung für die Funktion g. Beachten Sie dabei, dass wegen der Randbedingung $g(0) = g(\pi) = 0$ gilt.

Lösung:

Der Ansatz für g ist

$$g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

und da $g(0) = g(\pi) = 0$, muss $A = 0$ und $\omega = \omega_n := n \in \mathbb{N}$ gelten. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ genügt also

$$g_n(x) = B_n \sin(nx)$$

der Differentialgleichung für g mit den Randbedingungen $g(0) = g(\pi) = 0$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A2.**

4.A3 [4 Punkte] Bestimmen Sie zu jedem g die passende Lösung der Differentialgleichung für f, so dass $u(t,x) = f(t)g(x)$ eine Lösung von (PDE) ist, welche der Randbedingung genügt. Schreiben Sie die so gefundenen Basislösungen $u(t,x) = f(t)g(x)$ explizit hin.

Lösung:

Für jedes g_n folgt f_n der Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls

$$f_n'(t) + \lambda n^2 f_n(t) = 0.$$

Also ist $f_n(t) = e^{-\lambda n^2 t}$.

Als Basislösung erhalten wir

$$u_n(t,x) = e^{-\lambda n^2 t} B_n \sin(nx),$$

welche die Randbedingung erfüllt.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A3.**

4.A4 [5 Punkte] Finden Sie durch Superposition der Basislösungen diejenige Lösung von (PDE) welche zusätzlich die Anfangsbedingung erfüllt.

Hinweis. Setzen Sie die Anfangsbedingung als ungerade Funktion mit Periode 2π fort und benutzen Sie $\int x\sin(nx)dx = \frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2} + C$.

Lösung:

Der Ansatz

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda n^2 t} \sin(nx)$$

genügt den der Randbedingung und der PDE (vorausgesetzt die Summe konvergiert).

Sei $h_u(x)$ die ungerade 2π-periodische fortsetzung der Anfangsbedingung.

Die Koeffizienten B_n wählt man also so, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist, das heisst,

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = h_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

wobei b_n die Fourier-koeffizienten von h_u sind, also, für $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_u(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n\pi}{n^2}\cdot(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Also ist mit Koeffizientenvergleich $B_n = b_n = -\frac{2}{n}$ für n gerade und $B_n = b_n = \frac{2}{n}$ für n ungerade und damit

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-\lambda n^2 t} \sin(nx).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A4.**