Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Wir betrachten das DGL-System

$$x'(t) = Ax(t),\ t \geq 0, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A = PDP^{-1}$ mit

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Lösung $t \mapsto x(t)$ des DGL-System, mit Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, gegeben durch

(A) **TRUE:** $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} + e^{-2t} \\ -e^{-4t} + e^{-2t} \end{pmatrix}$

(B) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}t} - 1 \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(C) $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

(D) $x(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{pmatrix}$

Lösung:

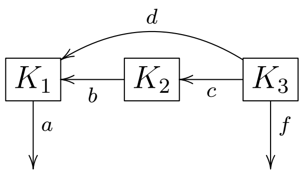
Das Matrix-Exponential ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-4t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-4t} + e^{-2t} & -e^{-4t} + e^{-2t} \\ -e^{-4t} + e^{-2t} & e^{-4t} + e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung des DGL-System gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-4t} + e^{-2t} \\ -e^{-4t} + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

1.MC2 [2 Punkte] Es seien a, b, c, d, f positive reelle Zahlen. Wir betrachten das folgende Kompartimentmodell mit Kompartimenten K_1, K_2 und K_3 :



Die Stoffmengen einer Substanz zur Zeit $t \geq 0$ in den einzelnen Kompartimenten seien gegeben durch die Funktionen $t \mapsto Y_i(t)$, $i \in \{1,2,3\}$. Das Kompartimentmodell wird durch das folgende DGL-System beschrieben

$$Y'(t) = AY(t),\ t \geq 0, \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Welche Matrix A passt zum obigen Kompartimentmodell?

(A) **TRUE:** $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -b & c \\ 0 & 0 & -(c+d+f) \end{pmatrix}$

(B) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(C) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+f) & c \\ b & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

(D) $A = \begin{pmatrix} -a & b & d \\ 0 & -(b+d) & a \\ 0 & 0 & -(c+d) \end{pmatrix}$

Lösung:

Sollte selbsterklärend sein.

1.MC3 [2 Punkte] Sei $y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein inhomogenes lineares System.

Für welches $y_{\infty,2}$ ist $y_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ eine stationäre Lösung?

(A) **TRUE:** $y_{\infty,2} = 1$

(B) $y_{\infty,2} = \frac{1}{2}$

(C) $y_{\infty,2} = 0$

(D) $y_{\infty,2} = -\frac{1}{2}$.

Lösung:

Weil y_∞ eine stationäre Lösung ist gilt

$$0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt $y_{\infty,2} = 1$.

1.A1 Die Matrix A sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(i) [**2 Punkte**] Bestimmen Sie das Matrix-Exponential e^{tA} für $t \geq 0$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst $T^{-1}AT$, wobei die Matrizen T und T^{-1} gegeben sind durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \\ 4e^{-t} & -4e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4te^{-t} + e^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} - e^{-t} \\ 4te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}(1+4t) & -4te^{-t} \\ 4te^{-t} & e^{-t}(1-4t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die Lösung der DGL

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Die Lösung der DGL ist gegeben durch

$$x(t) = e^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t}(1+4t) \\ 4te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A1.**

1.A2 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' - 4x' + 4x = 0. \tag{1}$$

(i) **[1 Punkt]** Sei nun $y(t) = (x(t), x'(t))^T$, wobei x eine Lösung von (1) ist. Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass gilt

$$y'(t) = Ay(t).$$

Lösung:

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich gilt mit dieser Matrix

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -4x(t) + 4x'(t) \end{pmatrix}.$$

(ii) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von (1).

Lösung:

Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$, mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 2$. Nach Satz 1.22 bilden die Funktionen

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = te^{2t},$$

ein Fundamentalsystem.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 1.A2.**

Aufgabe 2

2.MC1 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t4^t$. Dann ist die Laplacetransformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{(s - \ln(4))^2}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s^2 - \ln(4)}$

Lösung:

Mit dem Dämfpungssatz folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}[te^{\ln(4)t}](s)\\ &= \mathcal{L}[t](s - \ln(4))\\ &= \frac{1}{(s - \ln(4))^2}.\end{aligned}$$

2.MC2 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = (t-1)^3\vartheta(t-1)$, wobei

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Dann ist die Laplace-Transformation $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch:

(A) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\dfrac{6}{s^4}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{2}{s^3}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = e^{-s}\dfrac{2}{s^5}$

Lösung:

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$\mathcal{L}[(t-1)^3\vartheta(t-1)](s) = e^{-s}\mathcal{L}[t^3](s) = e^{-s}\frac{6}{s^4}.$$

2.MC3 [2 Punkte] Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = t^{5/2}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.$$

Dann ist die Laplace-Transformation von $\mathcal{L}[g]$ gegeben durch

(A) **TRUE:** $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}$

(B) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8s^{5/2}}$

(C) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{s^{5/2}}$

(D) $\mathcal{L}[g](s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$

Lösung:

Mit dem Satz über Integration im Originalbereich folgt

$$\mathcal{L}(t^{3/2})(s) = \frac{3}{2s}\mathcal{L}(t^{1/2})(s) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}.$$

Wenden wir den Satz noch einmal an, erhalten wir

$$\mathcal{L}\left(t^{5/2}\right)(s) = \frac{5}{2s}\mathcal{L}\left(t^{\frac{3}{2}}\right)(s) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}$$

Insgesamt, erhalten wir

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}$$

2.A1 [3 Punkte] Bestimmen Sie die inverse Laplace-Transformation von $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A1.**

Lösung:

Nach dem Faltungs-Satz gilt

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{-2t})(s)\mathcal{L}(e^{-3t})(s) = \mathcal{L}(e^{-2t} * e^{-3t})(s).$$

Für die Faltung erhalten wir

$$(e^{-2u} * e^{-3u})(t) = \int_0^t e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-3t}e^{\tau}d\tau = e^{-2t} - e^{-3t}.$$

Alternativer Lösungsweg: Mit einer Partialbruchzerlegung und mit dem Dämpfungssatz sehen wir

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \mathcal{L}[e^{-2t} - e^{-3t}](s).$$

2.A2 [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) + x(t) = t, \quad x(0) = 1,$$

unter Verwendung der Laplace-Transformation.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 2.A2.**

Lösung:

Wir definieren $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$. Mit dem Ableitungs-Satz folgt

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t) + x(t)](s) = sX(s) - x(0) + X(s) = X(s)(s+1) - 1.$$

Ausserdem gilt

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}.$$

Wenn wir die Laplace-Transformation auf beiden Seiten der Differentialgleichung anwenden und nach $X(s)$ auflösen, erhalten wir

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)}.$$

Nach Lemma 3.43 gilt für $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Daraus folgt $A = -1, B = 1, C = 2$ und wir erhalten

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} = -\mathcal{L}[1](s) + \mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[2e^{-t}](s) = \mathcal{L}[-1 + t + 2e^{-t}](s).$$

Die Lösung der Gleichung ist also

$$x(t) = 2e^{-t} + t - 1.$$

Aufgabe 3

3.MC1 [2 Punkte] Sei $L > 0$ und $f : [-L, L[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - \pi$ eine Funktion, die wir $2L$-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Für welchen Wert L ist der Fourierkoeffizient $a_0 = 0$?

(A) **TRUE:** $L = \sqrt{3\pi}$

(B) $L = 2$

(C) $L = \sqrt{2\pi}$

(D) $L = 3\sqrt{\pi}$

Lösung:

Die korrekte Antwort ist $L = \sqrt{3\pi}$, da

$$a_0 = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}(x^2-\pi)dx = \frac{2}{2L}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L}^{L} - 2\pi L\right) = \frac{2}{2L}\left(2\frac{L^3}{3} - 2\pi L\right)$$
$$= 2\frac{L^2}{3} - 2\pi = 0 \iff L = \sqrt{3\pi}.$$

3.MC2 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2\cos(x)$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Weiterhin sei $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$ die Fourier-Reihe zur Funktion von f. Dann gilt

(A) **TRUE:** $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(B) $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(C) $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$

(D) $b_1 = \pi$

Lösung:

Weil f ungerade und $x \mapsto \sin(nx)$ gerade ist, gilt

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

3.MC3 [2 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dann kann f auf ganz $\mathbb{R}$ als Fourier-Reihe dargestellt werden. Welchen Wert nimmt die Fourier-Reihe von f an der Sprung-Stelle $x = \pi$ an?

(A) **TRUE:** 0

(B) 1

(C) -1

(D) 2

Lösung:

Nach Satz 4.6 konvergiert die Funktion zum Mittel des linken und rechten Grenzwertes bei $x = \pi$, also gegen $\frac{\pi-\pi}{2} = 0$.

3.A1 [3 Punkte] Sei $f : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ eine Funktion, die wir 2π-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A1.**

Lösung:

Weil die Funktion f gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$.

Für den Koeffizienten a_n gilt (rewrite)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx.$$

Damit erhalten wir

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{|x|}_{=x, \text{da } x\geq 0}\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2\right) = \pi,$$

und für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\underbrace{|x|}_{=x, \text{da } x\geq 0}) \cos(nx) dx \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos(0)}_{=1}) \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

3.A2 [3 Punkte] Sei $f : [0, 2[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-x/2}$ für $x \in [0, 2[$ eine Funktion, die wir 2-periodische nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourier-Reihe von g.

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 3.A2.**

Lösung:

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{-i2\pi n x}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(\frac{1}{2}+i\pi n)x} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\frac{1}{2}+i\pi n} e^{-(\frac{1}{2}+i\pi n)x}\right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+i\pi n}\left(e^{-1}-1\right) \\
&= \frac{1}{1+i2\pi n}\left(1-e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

4.MC1 [2 Punkte] Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion, wobei $\overline{B_1(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = 2(\sin(\varphi))^2, \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dann ist das Maximum der Funktion u auf $\overline{B_1(0)}$ gegeben durch

(A) **TRUE:** 2

(B) -1

(C) 0

(D) $\frac{1}{2}$

Lösung:

Wir wenden Korollar 5.11 an. Die Funktion u ist harmonisch und nicht konstant auf $\overline{B_1(0)}$. Also nimmt die Funktion ihr Maximum auf dem Rand $\partial\overline{B_1(0)}$ an. Es gilt also

$$\max_{(r,\varphi)\in\overline{B_1(0)}} u(r,\varphi) = \max_{(r,\varphi)\in\partial\overline{B_1(0)}} u(r,\varphi) = \max_{\varphi\in[0,2\pi)} u(1,\varphi) = 2 \max_{\varphi\in[0,2\pi)} (\sin(\varphi))^2 = 2.$$

4.MC2 [2 Punkte] Es sei $u : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante harmonische Funktion. Wir betrachten u in Polarkoordinaten und es gelte die Randbedingung

$$u(1,\varphi) = \begin{cases} 2 \text{ wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 \text{ wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Dann ist $u(0,0)$ gegeben durch

(A) **TRUE:** 1

(B) -1

(C) 0

(D) $\frac{1}{2}$

Lösung:

Nach der Mittelwerteigenschaft (Satz 5.10), gilt

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 d\varphi = 1.$$

4.MC3 [2 Punkte] Für $k \in \mathbb{R}$, definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto \sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Welche der folgenden Gleichungen gilt für den Parameter k, wenn u die Wellengleichung erfüllt?

(A) **TRUE:** $4k^2 = 1$

(B) $k = 3$

(C) $k = -1$

(D) $k^2 = 4$

Lösung:

Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} u_x(t, x) &= k\cos(kx - t), \quad & u_{xx}(t, x) &= -k^2 \sin(kx - t) \\ u_t(t, x) &= -\cos(kx - t), \quad & u_{tt}(t, x) &= -\sin(kx - t). \end{aligned}$$

Die Funktion u ist genau dann eine Lösung von $u_{tt} = 4u_{xx}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ die Beziehung

$$-\sin(kx - t) = -4k^2 \sin(kx - t)$$

gilt. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $1 = 4k^2$ ist.

4.A1 [6 Punkte] Die Schwingung einer Saite werde modelliert durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \text{ für } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0. \tag{PDE}$$

Die Enden der Saite sind fixiert bei $x = 0$ und $x = 1$. Das heisst, es gelten die Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \text{für } t > 0. \tag{RB}$$

Ausserdem, nehmen wir an, dass folgende Anfangsbedingungen gelten

$$u(x, 0) = 4\sin(6\pi x), \quad \text{für } 0 < x < 1, \tag{AB0}$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad \text{für } 0 < x < 1. \tag{AB1}$$

(i) Führen Sie den Separationsansatz $u(x, t) = f(x)g(t)$ in (PDE) durch, um je eine gewöhnliche Differentialgleichung für f und g zu erhalten. Achten Sie darauf, dass für f periodische Funktionen gesucht werden. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen der Differentialgleichungen nicht konstant gleich Null sind.

Lösung:

Es gilt, dass

$$f(x)g''(t) = u_{tt} = u_{xx} = f''(x)g(t),$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{f(x)g(t)}$ erhält man

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von t abhängt, müssen beide Seiten konstant sein. Damit f eine periodische Funktionen in x ist, muss also

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = -\omega^2$$

gelten für ein $\omega > 0$. Man erhält somit die beiden Differentialgleichungen

$$g''(t) = -\omega^2 g(t), \tag{2}$$
$$f''(x) = -\omega^2 f(x). \tag{3}$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösungen f_n der Differentialgleichung für f, so dass die Randbedingung $f_n(0) = f_n(1) = 0$ gilt. Beachten Sie ausserdem, dass die Lösungen f_n nicht konstant gleich Null sind.

Lösung:

Die allgemeine Lösung von (2) ist

$$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Aus (RB), folgt $f(0) = f(1) = 0$. Daraus folgt $A = 0$ und $\omega_n = n\pi$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir können $n = 0$ ausschliessen, weil sonst die Funktion f konstant gleich Null wäre. Die gesuchten Lösungen sind also von der Form

$$f_n(x) = B_n \sin(\omega_n \pi x) = B_n \sin(n\pi x), \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } B_n \in \mathbb{R}.$$

(iii) Bestimmen Sie zu jedem f_n eine Lösung g_n der Differentialgleichung für g, so dass die Fundamentallösungen $u_n(x,t) = f_n(x)g_n(t)$ die Anfangsbedingung (AB1) erfüllen. Beachten Sie ausserdem, dass die Fundamentallösungen u_n nicht konstant gleich Null sind. Schreiben Sie die Fundamentallösungen u_n explizit hin.

Lösung:

Die allgemeine Lösung von (3) ist

$$g(t) = \tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t), \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}.$$

Mit ω_n aus Teil (ii), sind die Lösungen von der Form

$$g_n(t) = \tilde{A}_n \cos(nt) + \tilde{B}_n \sin(nt), \quad \tilde{A}_n, \tilde{B}_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Mit (AB1) folgt

$$\partial_t u_n(x,0) = f_n(x) g_n'(0) = 0 \quad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Damit erhalten wir

$$g_n'(0) = -n\tilde{A}_n \sin(0) + n\tilde{B}_n \cos(0) = n\tilde{B}_n = 0,$$

und somit $\tilde{B}_n = 0$. Die gesuchten Fundamentallösungen sind also

$$u_n(x,t) = f_n(x) g_n(t) = B_n \sin(n\pi x) \tilde{A}_n \cos(n\pi t) = C_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi t),$$

mit $C_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wobei wir die Konstanten $\tilde{A}_n$ und B_n, zu einer neuen Konstanten C_n zusammengefasst haben.

(iv) Finden Sie durch Superposition der Fundamentallösungen, also mit dem Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t),\ C_n \in \mathbb{R}$$

die Lösung von (PDE), welche die Anfangsbedingungen (AB0), (AB1) und die Randbedingung (RB) erfüllt. Schreiben Sie die Lösung explizit hin.

Lösung:

Einsetzen von $u_n(x,t)$ ergibt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi t).$$

Aus (AB0) folgt

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) = 4\sin(6\pi x).$$

Mit Koeffizientenvergleich folgt also $C_6 = 4$ und $C_n = 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$. Die Lösung ist also gegeben durch

$$u(x,t) = 4\sin(6\pi x)\cos(6\pi t).$$

Notieren Sie Ihre Lösungen **in Ihrem Antwortheft unter Aufgabennummer 4.A1.**