Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2010**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1} = 2.$$

b) Wir berechnen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\log(x)}{x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\log(x)+\frac{x+1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{2x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2} = 0,$$

und

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2} = 0.$$

Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)(x+1)}{x^2} = 0.$$

c) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

(im Punkt $x_0 = 0$) ist gegeben durch

$$f(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2},\ \text{wenn } x \sim 0.$$

d) Die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} y''(x) = -4y(x), \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

ist gegeben durch.

$$y(x) = \cos(2x).$$

e) Offensichtlich ist

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{falls } x<1, \\ x-1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 1-xdx + \int_1^2 x-1dx = 1-1/2+3/2-1 = 1.$$

f) Mit dem Startwert $x_0 = 0$, erhalten wir:

$$x_1 = -\frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{29}{90}.$$

2. a)

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1,$$

$$\overline{2i\left(\frac{1}{2}-i\right)} = \overline{i+2} = 2-i,$$

$$-8\sqrt{-27} = -8\sqrt{3^2\cdot 3\cdot(-1)} = -8\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = -24\sqrt{3}i,$$

$$\frac{2}{3+2i} - \frac{3}{3-2i} = \frac{2(3-2i)-3(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-9-6i}{9-4i^2} = \frac{-3}{13} - \frac{10}{13}i.$$

b) Es ist $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{i\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, also

$$z = 8e^{\frac{3\pi i}{4}}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 16e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = 16e^{i\pi\frac{13}{12}}.$$

Wir lesen ab $\arg(z) = \pi\frac{13}{12}$, $|z| = 16$.

c) Es gilt

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3}+bi) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)(5\sqrt{3}+bi) = 15 + b\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - b.$$

Für $b=-5$ wird z eine reelle Zahl und damit

$$z = 15 + (-5)\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}i - (-5) = 20.$$

d) Es ist $|z^2| = 2$ und $\arg(z^2) = \frac{\pi}{3}$. Daraus folgt

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

und

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}.$$

3. (*10 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

1. falsch (der Rang der erweiterten Matrix kann ja trotzdem grösser sein)
2. richtig (die Determinante ist 15)
3. falsch
4. richtig (die Diagonaleinträge sind ja die Eigenwerte, wenn 0 dabei wäre, dann wäre die Determinante 0 und die Matrix nicht invertierbar)

b) Die gesuchte Menge besteht aus allen μ mit $\det A \neq 0$, entwickeln nach der zweiten Spalte ergibt $\det A = 2(2(\mu+1)-\mu) = 2(\mu+2)$, also $\mu \neq -2$.

c) Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zu lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

wobei im ersten Schritt die 3-te Zeile zur 2-ten dazuaddiert wurde und im zweiten Schritt wurde die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte 1-te Zeile zur 3-ten dazuaddiert. Die Lösung lautet daher $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, 2, -1)^T$. Also gilt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

d) Die Inverse hat dieselben Eigenvektoren, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3, also ist derselbe Vektor Eigenvektor der Inversen zum Eigenwert $\frac{1}{3}$.

4. (*10 Punkte*)

a) Durch Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2dx.$$

Dann integrieren wir beide Seiten und erhalten

$$\ln(|y|) = 2x + \ln(|K|), \quad K \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

wobei die Integrationskonstante in der logarithmischen Form $\ln(|K|)$ ausgedrückt ist. Mit der weiteren Lösung $y = 0$ der DGL folgt

$$y = Ke^{2x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Wegen $y(0) = 1$, erhalten wir $K = 1$, so dass die Lösung des Anfangwertsproblems $y = e^{2x}$ ist.

b) Zunächst trennen wir die beiden Variablen:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -xdx.$$

Dann integrieren wir beide Seiten und erhalten

$$\int \frac{dy}{y} = \int -xdx \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = -\frac{x^2}{2} + \ln(|K|), \quad K \neq 0,$$

wobei wir die Integrationskonstante in der logarithmischen Form $\ln(|K|)$ schreiben. Somit erhalten wir die Lösung der homogenen Gleichung ($y = 0$ ist auch Lösung der homogenen DGL)

$$y = K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad K \in \mathbb{R}.$$

c) Da wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung haben, ersetzen wir die Integrationskonstante K durch eine Funktion $K(x)$ und versuchen, die inhomogene Differentialgleichung durch den Produktansatz

$$y = K(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

zu lösen (Variation der Konstanten). Durch Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$y' = K'(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - xK(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Wir setzen nun die für y und y' gefundenen Terme in die inhomogene Differentialgleichung

$$K'(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - xK(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + xK(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (x-1)\exp(-x).$$

Somit

$$K'(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (x-1)\exp(-x) \quad \Rightarrow \quad K'(x) = (x-1)\exp\left(\frac{x^2}{2} - x\right).$$

Jetzt verwenden wir den Hinweis, wobei $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$. Dann gilt

$$K(x) = c + \exp\left(\frac{x^2}{2} - x\right).$$

Deshalb ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als

$$y(x) = c\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \exp(-x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

gegeben.

5. (*5 Punkte*)

a) Die zugehörige Höhenkoordinate ist gegeben durch $z_0 = \ln(1+4+1) - \ln(6) = 0$. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 2, 0)$ ist gegeben durch

$$z = f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2).$$

Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad \text{also} \quad f_x(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \\ f_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2+1} \quad \text{also} \quad f_y(1,2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$z = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2) \quad \text{oder} \quad z = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}.$$

b) Es gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+6y \\ 6x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{27}{2} \end{pmatrix}.$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind

$$\begin{aligned} 0 &= 6x+6y \\ 0 &= 6x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x = -y$. Einsetzen in die zweite Gleichung führt auf die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}y^2 - 6y + \frac{27}{2} = 0,$$

mit den Lösungen $y_1 = 9$ und $y_2 = 3$. Die kritischen Punkte sind also

$$(x_1, y_1) = (-9, 9) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2) = (-3, 3).$$

Die Hesse-Matrix H_f ist gegeben durch

$$H_f = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & y \end{pmatrix}$$

also folgt

$$\det H_f = 6y - 36.$$

Im Punkt $(-9,9)$ gilt

$$\det H_f(-9,9) = 18 > 0,$$

und $f_{xx} = 6 > 0$ und damit ist $(-9,9)$ ein lokales Minimum. Weiter folgt

$$\det H_f(-3,3) = -18 < 0,$$

und daher ist $(-3,3)$ ein Sattelpunkt.

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, t^2), && t \in [0,2] \\
\gamma_2(t) &= (2-t, 4), && t \in [0,2] \\
\gamma_3(t) &= (0, -t), && t \in [-4,0]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 (t^2 + 2t^3)\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^2 + \frac{1}{2}t^4\Big|_0^2 = \frac{32}{3} \\
I_2 &= \int_0^2 -4\,dt = -4t\Big|_0^2 = -8 \\
I_3 &= \int_{-4}^0 0\,dt = 0.
\end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

c) Es gilt $f(x,y) = y$ und $g(x,y) = x^2$, somit $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 1$. Mit dem Satz von Green erhalten wir dann:

- Variante 1

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{x^2}^4 (2x-1)\,dy\,dx &= \int_0^2 \left(2xy - y\Big|_{x^2}^4\right) dx \\
&= \int_0^2 (8x - 4 - 2x^3 + x^2)\,dx \\
&= 4x^2 - 4x - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \\
&= 16 - 8 - 8 + \frac{8}{3} \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

- Variante 2

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} (2x-1)\,dx\,dy &= \int_0^4 \left(x^2 - x\Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy \\
&= \int_0^4 (y - \sqrt{y})\,dy \\
&= \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 \\
&= 8 - \frac{16}{3} \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$