Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2010**

D–BIOL, D–CHAB

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Hilfsmittel: Aufzeichnungen im Umfang von 20 Seiten A4.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen *nicht* begründet werden. Schreiben Sie die Antworten *vollständig gekürzt und vereinfacht* direkt auf das Aufgabenblatt.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\log(x)}{x^2} = \underline{\qquad\qquad}.$$

c) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung (im Punkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1},$$

ist gegeben durch $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

d) Die Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{cases} y''(x) = -4y(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

ist gegeben durch $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

e) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral

$$\int_0^2 |1-x|dx = \underline{\qquad\qquad}.$$

f) Betrachten Sie die Gleichung

$$x^3 + 3x + 1 = 0,$$

und den Startwert $x_0 = 0$. Mit Hilfe des Tangentenverfahrens von Newton ist die approximative Lösung nach einer Iteration

$$x_1 = \underline{\qquad\qquad},$$

und nach zwei Iterationen

$$x_2 = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. (*10 Punkte*)
Die Antworten in dieser Aufgabe müssen *nicht* begründet werden. Schreiben Sie die Antworten *vollständig gekürzt und vereinfacht* direkt auf das Aufgabenblatt.

a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

(Bemerkung: $\overline{z}$ beschreibt die zu z konjugiert komplexe Zahl.)

$$i^{100} = \_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)} = \_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$-8\sqrt{-27} = \_\_\_\_\_\_\_\_,$$

$$\frac{2}{3+2i} - \frac{3}{3-2i} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

b) Es seien

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{und } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Berechnen Sie das Argument und den Betrag von $z = (z_1)^3 \cdot z_2$.

$$\arg(z) = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad |z| = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

c) Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

$$z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + bi)$$

Geben Sie b und z an:

$$b = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad z = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

d) Bestimmen Sie die Lösungen von

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

in Polarkoordinaten

$$z_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad z_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. (*10 Punkte*)

a) Die Antworten in dieser Teilaufgabe müssen *nicht* begründet werden. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt auf dem Aufgabenblatt an.

- Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.
  ☐ richtig ☐ falsch
- Die Vektoren
  $$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix},$$
  sind linear unabhängig.
  ☐ richtig ☐ falsch
- Für beliebige reelle 3×3-Matrizen A, B gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
  ☐ richtig ☐ falsch
- 0 kann nicht Eigenwert einer invertierbaren Diagonalmatrix sein.
  ☐ richtig ☐ falsch

b) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \mu \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \mu+1 \end{pmatrix}.$$
Finden Sie alle $\mu \in \mathbb{R}$ so, dass das homogene Gleichungssystem
$$Ax = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$
nur die triviale Lösung hat.

c) Seien
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$
Lösen Sie das lineare (inhomogene) System $Ax = b$ mittels des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor der **inversen** Matrix von
$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

4. (*10 Punkte*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + xy = 0,$$

durch Trennung der Variablen.

c) Finden Sie nun die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + xy = (x-1)e^{-x},$$

durch Variation der Konstanten.
Hinweis: Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C.$$

5. (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 1) - \ln(6),$$

im Flächenpunkt $(1, 2, z_0 =?)$.

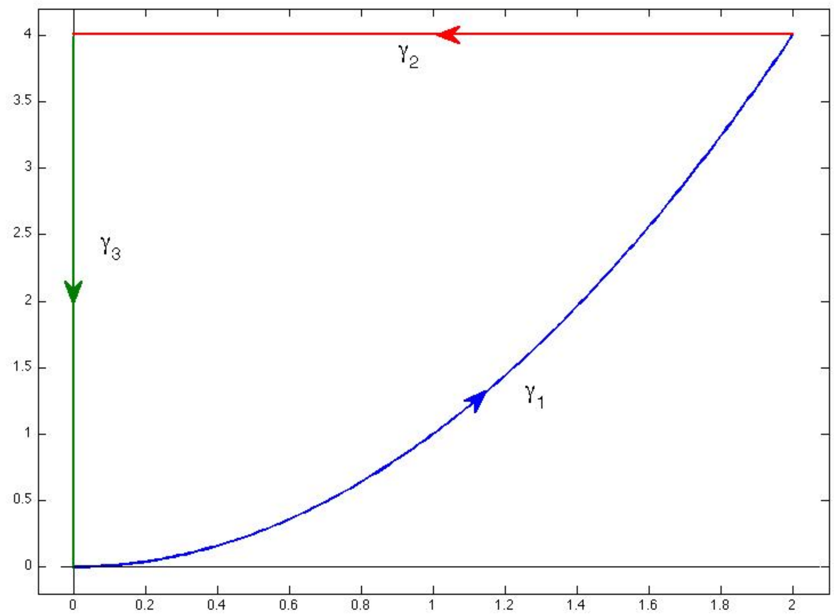
b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + \frac{1}{6}y^3 + \frac{27}{2}y,$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

6. (*10 Punkte*)

Wir betrachten das Linienintegral $\int_\gamma y\,dx + x^2\,dy$, wobei γ die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 durchläuft. Die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 sind in der untenstehenden Skizze gegeben. Der Weg γ_1 verläuft entlang einer Parabel.



a) Parametrisieren Sie die Wege γ_1, γ_2 und γ_3.

b) Berechnen Sie folgende Linienintegrale mit Hilfe der parametrisierten Wege γ_1, γ_2 und γ_3

$$I_1 = \int_{\gamma_1} y\,dx + x^2\,dy$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} y\,dx + x^2\,dy$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} y\,dx + x^2\,dy$$

und

$$I = \int_{\gamma} y\,dx + x^2\,dy.$$

c) Berechnen Sie das Linienintegral I mit Hilfe des Satzes von Green.