Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2011**

D–BIOL, D–CHAB

Lösungen zu Mathematik I/II

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

a) Wir berechnen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^3+4x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{3x^2+8x} = \frac{1}{4}.$$

b) Wir benutzen L'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)(x-\frac{\pi}{2}) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos(x)^2}}{-\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} \\
&= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos(x)^2} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{-2\sin(x)\cos(x)} \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)^2-\sin(x)^2} = -1.
\end{aligned}$$

c) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x) = \sin(e^x)$$

(im Punkt $x_0 = 0$) ist gegeben durch

$$T_2(x) = \sin(1) + \cos(1)\,x + \frac{1}{2}(\cos(1) - \sin(1))\,x^2.$$

d) Wir integrieren die Gleichung $y'' = y'$. Daraus folgt dass

$$y' = y + C.$$

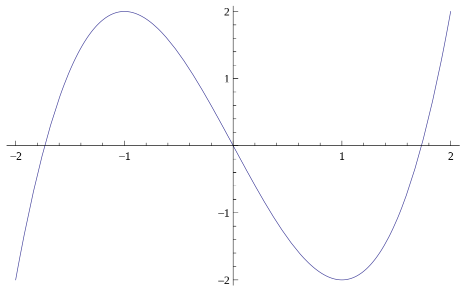
Aus $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$ folgt $y' = y$. Wir integrieren:

$$\ln(y) = x + D.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt, dass

$$y(x) = e^x.$$

e) Das lokale Minimum ist in $(1, -2)$ und das lokale Maximum in $(-1, 2)$.



f) Wir berechnen

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - 3x| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{0} x^3 - 3x dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} x^3 - 3x dx = \frac{9}{2}.$$

g) Wir berechnen mit $f = \sin(xy)$

$$f_x = y\cos(xy), \qquad f_y = x\cos(xy),$$
$$f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy), \qquad f_{yy} = -x^2\sin(xy).$$

Im Punkt $(0, 0)$ ist dann:

$$f_{xy}(0, 0) = 1, \quad f_{yy}(0, 0) = 0.$$

2. (*8 Punkte*)

a)

$$\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i} + e^{\frac{6\pi}{3}i} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{2011} = i.$$

b) Die Lösungen von
$$z^2 - z + iz - i = 0.$$
lauten
$$z_1 = 1, \quad z_2 = -i.$$

c)
$$z = (2 + i\sqrt{12})^{-5} = 4^{-5} e^{\frac{\pi}{3} i}.$$

d) Die Nullstellen von
$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$
lauten
$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5} i}, \quad z_2 = e^{\frac{4\pi}{5} i}, \quad z_3 = e^{\frac{6\pi}{5} i}, \quad z_4 = e^{\frac{8\pi}{5} i}.$$

3. (*12 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

i) falsch, denn
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ii) falsch, (da die Determinante der Matrix 0 ist).

iii) richtig (da die Determinante der Matrix 0 ist).

iv) falsch (die Determinante der Koeffizientenmatrix ist gleich 0, daher besitzt das homogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen).

b) Wir erhalten
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -8 & -18 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix},$$
und somit ist $\text{Rang}(A) = 4$.

c) Es gilt: v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow v$ ist Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$. Wir haben
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 und somit ist v auch Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{2}$.

d) *i)* In Matrix-Vektor Notation wird die Entwicklung durch das System

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{n-1} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ können wir direkt ablesen.

ii) Da $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, gibt es keinen dominanten Eigenwert und die Populationen sterben aus.

4. (*12 Punkte*)

a) Wir leiten die erste Differentialgleichung $y_1'(x) = 2y_1(x) + 3y_2(x)$ ein Mal nach x ab und bekommen

$$y_1''(x) = 2y_1'(x) + 3y_2'(x). \tag{1}$$

Nun setzen wir die zweite Differentialgleichung $y_2'(x) = y_1(x)$ in (1) ein und erhalten $y_1''(x) = 2y_1'(x) + 3y_1(x)$. Umgeformt bekommen wir die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung $y_1''(x) - 2y_1'(x) - 3y_1(x) = 0$.

b) Wir benutzen die Substitution $u(x) = \frac{y}{x}$ und unter Berücksichtigung, dass $y' = u'x + u$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} u'x + u &= u(1-u) \\ u'x &= -u^2, \qquad | \int \\ \int -u^{-2} du &= \int x^{-1} dx = \ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ u^{-1} &= \ln|x| + c \\ u &= \frac{1}{\ln|x| + c}. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{x}{\ln|x|+c}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

c) i) Die homogenen Differentialgleichung $\frac{y'}{y} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$ lösen wir mit Trennung der Variablen und erhalten $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} dx$. Somit folgt mit dem Hinweis $\ln|y| = -\ln(\sin(x)) + c$, mit $c \in \mathbb{R}$. Dies führt zu $y(x) = \frac{\hat{c}}{\sin(x)}$, wobei $\hat{c} \in \mathbb{R}$. Alternativ kann man die Formel für eine DGL der Form $y'(x) + f(x)y(x) = 0$ aus der Vorlesung benutzen, und erhält

$$y(x) = Ce^{-\int f(x)dx} = Ce^{-\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx} = Ce^{-\ln(|\sin(x)|)} = \frac{C}{\sin(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

da $\sin(x) > 0$ für $x \in]0, \pi[$.

ii) Variation der Konstanten führt auf den Ansatz $y(x) = \frac{K(x)}{\sin(x)}$. Somit gilt

$$y'(x) = \frac{K'(x)\sin(x) - K(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}. \tag{2}$$

Setzen wir den Ansatz $y(x) = \frac{K(x)}{\sin(x)}$ und (2) in die inhomogene Differentialgleichung $y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = \cos(x)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{K'(x)}{\sin(x)} - K(x)\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}K(x) &= \cos(x) \\
K'(x) &= \sin(x)\cos(x) \quad \Big| \int \\
K(x) &= \int \sin(x)\cos(x)dx \\
&= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)dx + c \\
&= \frac{1}{2}\sin^2(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir $y(x) = \frac{\frac{1}{2}\sin^2(x)+c}{\sin(x)} = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{c}{\sin(x)}$.

iii) Um die Konstante c zu bestimmen, betrachten wir die Anfangsbedingung: $y(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6}) + \frac{c}{\sin(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{4} + 2c = 3$, daraus folgt $c = \frac{11}{8}$. Also ist die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{11}{8\sin(x)}$.

5. (*8 Punkte*)

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{9}{4}x^2 - 5 + y, \frac{1}{\sqrt{y}} + x\right).$$

Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4}x^2 - 5 + y &= 0 \\
\frac{1}{\sqrt{y}} + x &= 0.
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = -\frac{1}{\sqrt{y}}$ und eingesetzt in die erste Gleichung erhalten wir

$$\frac{9}{4y} - 5 + y = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + \frac{9}{4} = 0.$$

Es folgt

$$y_1 = \frac{9}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Die kritischen Punkte liegen bei

$$\boxed{u_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{9}{2}\right) \quad \text{und} \quad u_2 = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right).}$$

Mit den zweiten Ableitungen von f

$$f_{xx} = \frac{9}{2}x, \quad f_{xy} = 1 \quad \text{und} \quad f_{yy} = -\frac{1}{2y^{3/2}}$$

erhalten wir für $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ in u_1 und u_2

$$D(u_1) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2(9/2)^{3/2}}\right) - 1 = \frac{1}{9} - 1 < 0,$$
$$D(u_2) = -\frac{9}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2(1/2)^{3/2}}\right) - 1 = 9 - 1 = 8 > 0.$$

Somit liegt in u_1 ein Sattelpunkt vor. In u_2 gilt $f_{xx}(u_2) = -\frac{9}{\sqrt{2}}$ und somit handelt es sich um ein lokales Maximum.

b) Wir berechnen das Volumen des Körpers mit Hilfe eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$$
$$= \int_0^1 ((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2) dx = \frac{1}{6}.$$

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{für } 0 \le t \le 1,$$
$$\gamma_2(t) = (1, t) \quad \text{für } 0 \le t \le 1,$$
$$\gamma_3(t) = ((1-t), (1-t)^3) \quad \text{für } 0 \le t \le 1,$$

b) Mit der Substitution

(bei I_1) $x = t, dx = dt$ und $y = 0, dy = 0$,
(bei I_2) $x = 1, dx = 0$ und $y = t, dy = dt$,
(bei I_3) $x = (1-t), dx = -dt$ und $y = (1-t)^3, dy = -3(1-t)^2 dt$,

folgt

$$I_1 = \int_{\gamma_1} -3y\, dx + 2x\, dy = 0.$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} -3y\, dx + 2x\, dy = \int_0^1 2dt = 2.$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} -3y\, dx + 2x\, dy = \frac{3(1-t)^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{3}{4}.$$

c)

$$I = \int_\gamma -3y\,dx + 2x\,dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5}{4}.$$

d) Es gilt $f(x,y) = -3y$ und $g(x,y) = 2x$, somit $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 5$. Mit dem Satz von Green erhalten wir dann

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} 5\,dy\,dx = 5 \int_0^1 x^3\,dx = \frac{5}{4}.$$