Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2011**

D–BIOL, D–CHAB

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwendet werden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3+4x^2} = \underline{\hspace{3cm}}.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)(x-\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{3cm}}.$$

c) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(e^x)$. Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ von f im Punkt $x_0 = 0$:

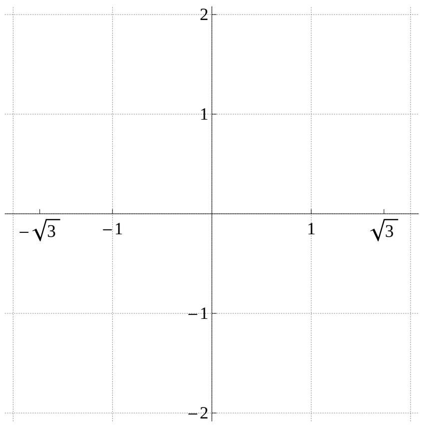
$$T_2(x) = \underline{\hspace{8cm}}$$

d) Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

ist gegeben durch $\underline{\hspace{6cm}}$.

e) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$. Skizzieren Sie den Graph von f und geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrema an.



Bitte wenden!

Das lokale Minimum liegt bei $(x, y) =$ ________________________,

Das lokale Maximum liegt bei $(x, y) =$ ________________________.

f) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - 3x| \, dx = \underline{\qquad\qquad}.$$

g) Gegeben sei die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(xy)$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yy} im Punkt $(0, 0)$

$$f_{xy}(0, 0) = \underline{\qquad\qquad}, \quad f_{yy}(0, 0) = \underline{\qquad\qquad}.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. (*8 Punkte*)
Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i} = \underline{\qquad\qquad}.$$

$$e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i} + e^{\frac{6\pi}{3}i} = \underline{\qquad\qquad}.$$

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{2011} = \underline{\qquad\qquad}.$$

b) Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 - z + iz - i = 0.$$

Die Lösungen sind

$$z_1 = \underline{\qquad\qquad}, \quad z_2 = \underline{\qquad\qquad}.$$

c) Schreiben Sie $z = (2 + i\sqrt{12})^{-5}$ in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

$$z = \underline{\qquad\qquad}.$$

d) Bestimmen Sie alle weiteren komplexen Nullstellen von

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i}, \quad z_2 = \underline{\qquad\qquad}, \quad z_3 = \underline{\qquad\qquad}, \quad z_4 = \underline{\qquad\qquad}.$$

Hinweis: Multiplizieren Sie den Ausdruck mit $(z - 1)$.

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

3. (*12 Punkte*)

a) Die Antworten in dieser Teilaufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an. Antworten zu dieser Teilaufgabe auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

i) Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

☐ richtig
☐ falsch

ii) Die Matrix $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\-1 & 2 & 3\\-1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ ist invertierbar.

☐ richtig
☐ falsch

iii) Die Matrix $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 2 & -1\\5 & 3 & -1\end{pmatrix}$ hat 0 als einen Eigenwert.

☐ richtig
☐ falsch

iv) Das lineare Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{rcl} x \phantom{{}-y} + 2z & = & 0\\ 2x - y + 3z & = & 0\\ 3x - y + 5z & = & 0\end{array}\right\}$ besitzt nur die triviale Lösung.

☐ richtig
☐ falsch

b) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\2 & 1 & -1 & 0\\4 & 2 & 0 & -2\\-1 & 7 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

mittels elementarer Umformungen in den Zeilen (Gauss-Verfahren).

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\3 & -1 & 0\\0 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A^{-1} ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Hinweis: Sie müssen dafür nicht unbedingt A^{-1} ausrechnen.

Bitte wenden!

d) Wir betrachten ein Modell, welches die Entwicklungen zweier Populationen j_n und a_n beschreibt. Dabei bezeichnen j_n und a_n die Grösse der jeweiligen Population zum Zeitpunkt n.

Formal sei die Entwicklung durch die Gleichungen

$$j_n = \frac{1}{\pi} \cdot j_{n-1} \tag{1}$$

$$a_n = j_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{n-1}, \tag{2}$$

beschrieben.

i) Beschreiben Sie die Gleichungen (1) und (2) durch ein Matrix-Vektor-Produkt $A \cdot v$, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

ii) Wie entwickeln sich die Populationen j_n und a_n für einen beliebigen Startvektor (j_0, a_0), mit $j_0 > 0$ und $a_0 > 0$, im Laufe der Zeit, das heisst, für wachsendes n?

Siehe nächstes Blatt!

4. *(12 Punkte)*

a) Wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $y_1(x)$ auf, mit deren Lösung dann die allgemeine Lösung des Systems bestimmt werden kann. **Sie müssen die Lösung jedoch nicht berechnen**.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Substitution die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x}\left(1 - \frac{y(x)}{x}\right), \quad x > 0.$$

c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = \cos(x), \qquad x \in \,]0, \pi[\tag{1}$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3. \tag{2}$$

i) Finden Sie die homogene Lösung der obigen Differentialgleichung, ohne die Anfangsbedingung zu berücksichtigen, d.h. finden Sie die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = 0, \qquad x \in \,]0, \pi[.$$

Hinweis: Für eine stetig differenzierbare Funktion f mit $f(x) \neq 0$ gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

ii) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y(x) = \cos(x), \qquad x \in \,]0, \pi[$$

durch Variation der Konstanten.

iii) Bestimmen Sie nun die Lösung des obigen Anfangswertproblems (1), (2).

Bitte wenden!

5. (*8 Punkte*)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{3}{4}x^3 - 5x + 2\sqrt{y} + xy,$$

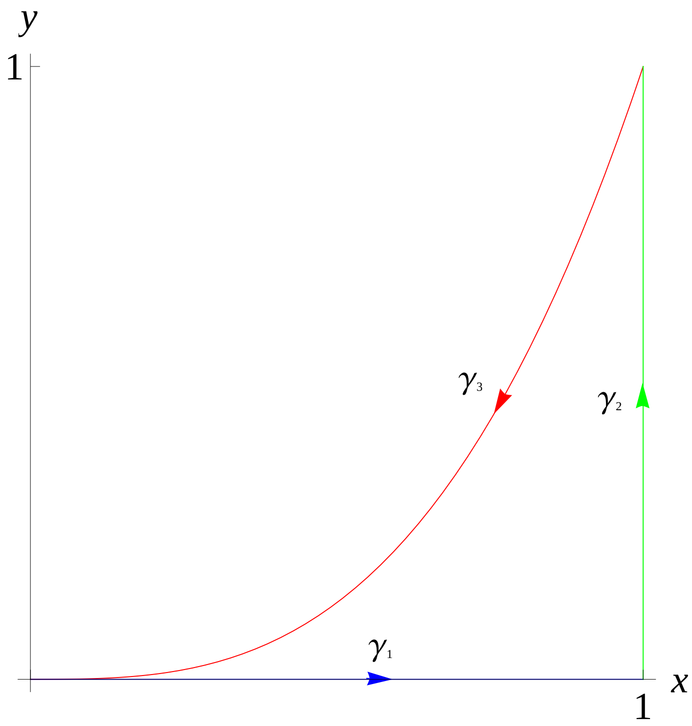
mit $y > 0$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Die drei Koordinatenebenen in $\mathbb{R}^3$ (xy-, yz- und xz-Ebene) und die Ebene

$$z = 1 - x - y$$

schliessen einen Körper ein. Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers **mit Hilfe eines Dreifachintegrals**.

6. (*10 Punkte*)
Gegeben seien drei ebene Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 wie in der untenstehenden Skizze. Dabei verlaufen γ_1 und γ_2 jeweils entlang von Geraden und γ_3 entlang der Kurve $y = x^3$.



a) Parametrisieren Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3. Das heisst, schreiben Sie jeweils die Kurve γ_i, $(i = 1, 2, 3)$ als Funktion $[a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \gamma_i(t) = (x(t), y(t))$.

b) Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale entlang der drei Kurven für das Vektorfeld $\mathbf{K} : (x, y) \mapsto \mathbf{K}(x, y) = (-3y, 2x)$.

$$I_1 = \int_{\gamma_1} -3y\,dx + 2x\,dy$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} -3y\,dx + 2x\,dy$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} -3y\,dx + 2x\,dy$$

c) Durchlaufen wir γ_1, γ_2 und γ_3, erhalten wir eine geschlossene Kurve γ. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe **b)** das Kurvenintegral $I = \displaystyle\int_\gamma -3y\,dx + 2x\,dy$.

d) Berechnen Sie das Kurvenintegral I mit Hilfe der Formel von Green.