Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2012**

BIOL-B GES+T PHARM

Lösungen zu Mathematik I/II

---

1. (*10 Punkte*)

a) Wir führen Polynomdivision durch und erhalten $(x^3-5):(x-1) = x^2+x+1-\frac{4}{x-1}$. Also ist $g(x)$ die Asymptote von $f(x)$ und somit folgt, dass

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

b) Wir erweitern und kürzen den Ausdruck wie folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{2-\sqrt{4+\sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{(2-\sqrt{4+\sqrt{h}})(2+\sqrt{4+\sqrt{h}})}{\sqrt{h}(2+\sqrt{4+\sqrt{h}})} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2+\sqrt{4+\sqrt{h}}} = -\frac{1}{4}.$$

Man kann den Limes auch mit l'Hospital berechnen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{2-\sqrt{4+\sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(4+\sqrt{h})^{-1/2}\frac{1}{2}h^{-1/2}}{\frac{1}{2}h^{-1/2}} = -\frac{1}{4}.$$

c) Um die Nullstelle von $e^{f(x)}-1$ zu bestimmen, müssen wir die Nullstellen von $f(x)$ bestimmen, denn $e^{f(x)} = 1$ genau dann wenn $f(x) = 0$. Da jedoch $\sin x$ und $\cos x$ 2π periodisch sind, sind $\pi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Nullstellen von $f(x)$. Weitere Nullstellen sind bei $\pi + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

d) Wir suchen $a \in \mathbb{R}$ so dass

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4}{a+x^2} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Für den Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4}{a+x^2} = \frac{1}{a+1},$$

also folgt $a = 1$.

e) Wir berechnen

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |3x - x^3| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{0} x^3 - 3x dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} x^3 - 3x dx = \frac{9}{2}.$$

f) i) Zuerst berechnen wir die Komposition $(g \circ f)(x) = 2e^{x^2}$ und $(f \circ g)(x) = e^{4x^2}$. Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ und derjenige von $f \circ g$ ist $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$. Also ist die Aussage *i*) richtig.

ii) Wie in der Teilaufgabe *i*) berechnet, ist $(g \circ f)(x) = 2e^{x^2} \neq e^{4x^2} = (f \circ g)(x)$. Somit ist die Aussage *ii*) falsch.

iii) Die Ableitungen lauten

$$(g \circ f)'(x) = 4xe^{x^2}$$
$$(f \circ g)'(x) = 8xe^{4x^2}.$$

Somit ist *iii*) falsch.

iv) In der Teilaufgabe *iii*) haben wir die Ableitungen berechnet. Setzen wir nun beide Ableitungen gleich 0, sehen wir mit Monotonie, dass $x = 0$ eine gemeinsame Extremalstelle ist. Somit ist die Aussage *iv*) richtig.

g) i) Diese Aussage ist falsch, denn die dargestellte Fläche ist gerade die Fläche des halben Einheitskreises. Dieser ist durch die Funktion $x^2 + y^2 = 1, x \in [0,1]$ gegeben. Lösen wir diese Kreisgleichung nach y auf so erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

mit $x \in [0,1]$. Also ist diese graue Fläche A durch $2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben.

ii) Diese Aussage ist richtig. Begründung siehe Teilaufgabe *i*).

iii) Die Aussage *iii*) ist auch falsch, denn die Fläche eines Halbkreises mit Radius 1 ist $\frac{\pi}{2}$ und der Wert des Integrals $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi$ ist π.

iv) Diese Aussage ist richtig, denn wir sehen schnell, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = \varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$, was mit dem Flächeninhalt der grauen Fläche A übereinstimmt.

2. (*8 Punkte*)

a) (ii) und (iii) sind richtig.

b) i) richtig

$$z_1 = 3 + i3\sqrt{3} = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \in B$$
$$\text{da } 2 \leq 3 \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

ii) falsch

$$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ und } z_2 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = 12e^{i\frac{5\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } 12 > 4.$$

iii) richtig

$$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{15}i} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{i\frac{7\pi}{30}} \in B$$
$$\text{da } 2 \leq \frac{5}{2} \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{7\pi}{30} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

iv) falsch
$z \in B$, wobei $z = z_1 z_2$, mit $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

$$z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i} z = 3e^{i\frac{7\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{7\pi}{12} > \frac{5\pi}{12}.$$

c) Da die Koeffizienten des Polynoms alle reell sind, ist mit jeder Nullstelle z_0 auch $\bar{z}_0$ eine Nullstelle. Somit ist $-i$ eine weitere Nullstelle. Dies kann man auch nachrechnen:

$$P(-i) = 5(-i) + 3(-i)^2 + 4(-i)^3 - (-i) + 3 = 0$$

d) $z^3 = 27 = 27e^{i\cdot 0}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \\ z_2 &= 3\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 &= 3\left(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

3. (*12 Punkte*)

a) MC Frage

Hier ist $\det(A) = 0$, daher gilt

i) falsch
ii) richtig
iii) richtig
iv) falsch.

b) MC Frage

Es gilt

i) richtig, da $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

ii) falsch, da $A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 4i+1 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) richtig, mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ ist auch jedes Vielfache $c \cdot v_1$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A. Weiter haben A und A^{-1} die gleichen Eigenvektoren.

iv) falsch, sonst müsste $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ auch Eigenvektor von A sein, was falsch ist (vgl. ii)).

c) i) Wir lösen das homogene Gleichungssystem $A - v = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit sind die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 gegeben durch $v = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus 0$.

ii) Wir rechnen nach, dass $Av = 3v$. Somit ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.

d) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha + 1.$$

Eine Nullstelle ist $\alpha_1 = 1$. Mit Polynomdivision finden wir

$$\alpha^3 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\alpha - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Somit hat $Ax = 0$ nur die triviale Lösung für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

4. (*10 Punkte*)

a) Formulieren wir das System in die Matrixschreibweise $\underline{y}'(x) = A \cdot \underline{y}(x)$ mit

$$\underline{y}'(x) := \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}, \quad \underline{y}(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

und der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so ist die zugehörige DGL 2. Ordnung gegeben durch

$$y''(x) - (a + d)y'(x) + \det A \cdot y(x) = 0.$$

Somit sehen wir, dass $a + d = 18$ und $a \cdot d - b \cdot c = -36$ gelten muss.

i) richtig. $a + d = 18$ und $a \cdot d - b \cdot c = -36$.

ii) richtig. $a + d = 18$ und $a \cdot d - b \cdot c = -36$.

iii) falsch. $a + d = 19 \neq 18$ (obwohl $a \cdot d - b \cdot c = -36$).

iv) falsch. $a + d = 18$ aber $a \cdot d - b \cdot c = -40$

b) Wir beobachten zuerst, dass unsere Differentialgleichung auf folgende Art umgeschrieben werden kann

$$y'(x) = x\big(y(x) - 1\big)^2.$$

Wir benutzen die Substitution $u(x) := y(x) - 1$. Dementsprechend gilt dass $u'(x) = y'(x)$. Dies eingesetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung führt zu

$$u'(x) = y'(x) = x\big(y(x) - 1\big)^2 = xu(x)^2.$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{du}{u^2} = \int x dx.$$

Daraus folgt

$$-\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

oder äquivalent, dass

$$u(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + C}.$$

Da $u(x) := y(x) - 1$, schliessen wir, dass die allgemeinen Lösungen der obigen Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

ist. Da unsere Anfangsbedingung $y(0) = 0$ lautet, folgt dass $C = 1$ und deshalb ist unsere Lösung von der Form

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + 1}.$$

c) i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) + xy(x) = 0.$$

Via Separation der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Lösung der homogenen DG von der Form

$$y_{hom}(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

ist.

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen, verwenden wir die Technik der sogenannten Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{allg}(x) = K(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{allg}(x) = K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x)xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Durch das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$\frac{1}{x}K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x}K(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + K(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}+2x}.$$

Daraus folgern wir dass

$$K'(x) = e^{2x}$$

und deshalb gilt

$$K(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \tilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatz schliessen wir, dass

$$y_{allg}(x) = (\frac{1}{2}e^{2x} + \tilde{K})e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}+2x} + \tilde{K}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

5. (*8 Punkte*)

a) Ein kritischer Punkt (x^*, y^*) ist gegeben durch:

$$f_x(x^*, y^*) = 0, \quad f_y(x^*, y^*) = 0.$$

Für diese Funktion erhalten wir

$$9(x^*)^2 - 9 = 0, \quad 2y^* + 4 = 0.$$

Die kritischen Punkte sind somit

$$(x_1, y_1) = (1, -2), \quad (x_2, y_2) = (-1, -2).$$

b) Mit den zweiten Ableitungen

$$f_{xx}(x, y) = 18x, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0,$$

folgt, dass der Punkt $(1, -2)$ ein lokales Minimum ist, weil

$$f_{xx}(1, -2)f_{yy}(1, -2) - f_{xy}(1, -2)^2 = 18 \cdot 1 \cdot 2 = 36 > 0$$

und $f_{xx}(1, -2) = 18 > 0$.

c) Die Tangentialebene im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \\ &= -9x + 4y. \end{aligned}$$

d) Der Punkt $(x_0, -2, 1)$ erfüllt die obige Gleichung der Tangentialebene, d.h. $1 = -9x_0 - 8$ und somit $x_0 = -1$.

e) Richtig sind *i)* und *iv)*.

6. (*12 Punkte*)

a) Wir können beispielsweise die folgenden Parametrisierungen verwenden

$$\begin{aligned} \sigma_1 : t &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \\ \sigma_2 : t &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad 1 \le t \le 2, \\ \sigma_3 : t &\mapsto \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2. \end{aligned}$$

b) Durchlaufen wir γ_1, γ_2 und γ_3, erhalten wir eine geschlossene Kurve γ, welche den Rand eines Dreiecks beschreibt. Die Eckpunkte des Dreiecks sind $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Das Dreieck wird in positiver Orientierung durchlaufen.

c) i) Mit dem Satz von Green erhalten wir

$$\int_\gamma (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} Q_x - P_y dydx,$$

wobei

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 2y + x\sin(2xy), \quad \text{also} \quad Q_x(x,y) = \sin(2xy) + 2xy\cos(2xy), \\ P(x,y) &= 2x + y\sin(2xy), \quad \text{also} \quad P_y(x,y) = \sin(2xy) + 2xy\cos(2xy). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_\gamma (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 0 dydx = 0.$$

ii) Wir erhalten

$$\int_{\gamma_1} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy = \int_0^1 2tdt = 1,$$

iii) Da

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&= \int_{\gamma_1} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&\quad + \int_{\gamma_2} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&\quad + \int_{\gamma_3} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy,
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_2} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&= -\int_{\gamma_1} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&\quad - \int_{\gamma_3} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&= -1 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Falls zum Beispiel mit $\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 1$ und $\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = 0$ gerechnet wird, folgt analog

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_2} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&= 1 - \int_{\gamma_1} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&\quad - \int_{\gamma_3} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy \\
&= 1 - 0 - (-1) = 2.
\end{aligned}$$