Dr. A. Caspar **ETH Zürich, August 2012**

BIOL-B GES+T PHARM

Prüfung zur Vorlesung Mathematik I/II

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi-Nr.:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte		Kontrolle	
	MC	Total	MC	Total
1				
2				
3				
4				
5				
6	-		-	
Total				

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (nicht Blätter!) mit persönlichen, von Hand geschriebenen Notizen. Keine (Taschen)Rechner. 1 Wörterbuch für fremdsprachige Studierende.

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen in das Deckblatt ein und geben Sie es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt Ihrer Arbeit ab.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Soweit nicht anders angegeben, begründen Sie Ihre Lösungen. Dabei können Sie bekannte Formeln aus der Vorlesung und den Übungen ohne Herleitung verwenden.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt. Ordnen Sie jedoch am Ende der Prüfung die Aufgaben für die Abgabe.
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben lösen. Versuchen Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Bei einer **Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe)** sind jeweils 4 Aussagen/Antworten angegeben, davon sind jeweils genau 2 korrekt.

  Eine MC-Aufgabe ist genau dann korrekt gelöst, wenn Sie die 2 korrekten Antworten mit "richtig" **und** die 2 inkorrekten mit "falsch" kennzeichnen. Sie müssen also bei jeder MC-Aufgabe genau 4 Kreuze setzen und jedes muss jeweils an der richtigen Stelle sein.

  Zum Beispiel ist folgende MC-Aufgabe nur mit diesen 4 Kreuzen korrekt gelöst.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\otimes$	$\bigcirc$	Hier steht eine korrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.
$\bigcirc$	$\otimes$	Hier steht eine inkorrekte Aussage/Antwort.

  Bei den MC-Aufgaben werden nur die Antworten auf den **Aufgabenblättern** bewertet. Die Antworten in den MC-Aufgaben müssen nicht begründet werden.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben

---

1. (*10 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

a) Gegeben seien die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 + x + 1.$$

Berechnen Sie:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

b) Berechnen Sie

$$\lim_{h \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 + \sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Bruch geschickt zu erweitern und eine binomische Formel anzuwenden.

c) Gegeben sei

$$f(x) = \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} + \sin(x)\cos(x).$$

Es gilt $f(\pi) = 0$ mit $\pi = 3,14\ldots$

Bestimmen Sie zwei Nullstellen x_1, x_2 der Funktion g mit

$$g(x) = e^{f(x)} - 1.$$

$$x_1 = \_\_\_\_\_\_ \qquad x_2 = \_\_\_\_\_\_.$$

d) Seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{a+x^2} & \text{falls } x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Für welches a ist f stetig in $x_0 = 1$?

$a = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$

e) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |3x - x^3| \, dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Bitte wenden!

f) MC-Aufgabe

Gegeben seien zwei Funktionen

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{x^2},$$
$$g : D_g \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = 2x,$$

dabei sind D_f der grösstmögliche Definitionsbereich von f und D_g der von g. Wir betrachten die Kompositionen

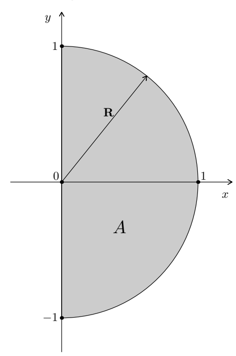
$$f \circ g : D_{f\circ g} \to \mathbb{R}, \qquad f \circ g(x) = f(g(x)),$$
$$g \circ f : D_{g\circ f} \to \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Dabei sind $D_{f\circ g}$ der grösstmögliche Definitionsbereich der Komposition $f \circ g$ und $D_{g\circ f}$ der grösstmögliche Definitionsbereich der Komposition $g \circ f$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Die Definitionsbereiche sind gleich: $D_{f\circ g} = D_{g\circ f}$.
○	○	Die Kompositionen sind gleich: $g \circ f = f \circ g$.
○	○	Die Ableitungsfunktionen sind gleich: $(g \circ f)' = (f \circ g)'$.
○	○	Die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ haben eine gemeinsame Extremalstelle.

g) MC-Aufgabe

Die Fläche A sei die rechte Hälfte der Kreisscheibe um Null mit Radius $R = 1$, das heisst, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.



Welche der folgenden Integrale haben denselben Wert wie der Flächeninhalt von A?
Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$
○	○	$\displaystyle 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$
○	○	$\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi.$
○	○	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi.$

Siehe nächstes Blatt!

2. (*8 Punkte*)

Die Antworten in dieser Aufgabe müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet.

Hier bezeichnet i die imaginäre Einheit. Es gilt also $i^2 = -1$.

a) MC-Aufgabe

Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

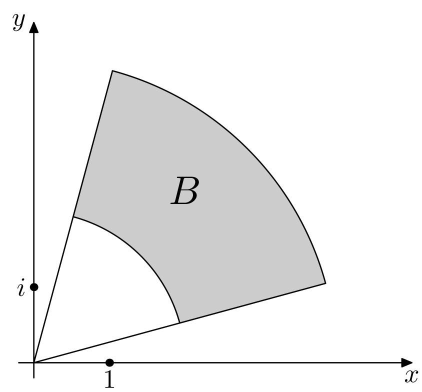
Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
◯	◯	$i^{17} = i^{19}$.
◯	◯	$-i^{18} = i^{20}$.
◯	◯	$i^{15} = i^{19}$.
◯	◯	$i^{20} = -i^{-20}$.

b) MC-Aufgabe

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit

$$B = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 2 \le r \le 4, \frac{\pi}{12} \le \varphi \le \frac{5\pi}{12}\}.$$



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 das Produkt $z = z_1 \cdot z_2$ in B liegt:

$$z = z_1 \cdot z_2 \in B\ ?$$

Kreuzen Sie die entsprechenden Antworten direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
◯	◯	$z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i$ und $z_2 = \frac{1}{2}$.
◯	◯	$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ und $z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.
◯	◯	$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{15}i}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$.
◯	◯	$z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Bitte wenden!

c) Gegeben sei das Polynom

$$P(z) = 5z^{1001} + 3z^{126} + 4z^{27} - z + 3.$$

Es gilt $P(i) = 0$. Bestimmen Sie eine weitere Nullstelle z_0 von P.

$$z_0 \quad = \quad \underline{\hspace{5cm}}$$

d) Bestimmen Sie die Lösungen z_1, z_2 und z_3 der Gleichung $z^3 = 27$ in kartesischer Darstellung.

$$z_1 \quad = \quad \underline{\hspace{5cm}},$$

$$z_2 \quad = \quad \underline{\hspace{5cm}},$$

$$z_3 \quad = \quad \underline{\hspace{5cm}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Alle Eigenwerte von A sind verschieden von 0.
○	○	Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig.
○	○	Es ist $\det(A) = 0$.
○	○	Die Matrix A ist invertierbar.

b) MC-Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
○	○	Der Vektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
○	○	Der Vektor $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\cdot 1 \\ (1+i)\cdot(-2i) \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A^{-1}.
○	○	Der Vektor $\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\cdot i \\ (1+i)\cdot 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A^{-1}.

c) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Ein Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 1$. Bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.

ii) Zeigen Sie, dass

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

d) Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung hat.

4. *(10 Punkte)*

a) MC-Aufgabe

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) - 18y'(x) - 36y(x) = 0 \tag{1}$$

und das System von Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1'(x) & = a\ y_1(x) + b\ y_2(x) \\ y_2'(x) & = c\ y_1(x) + d\ y_2(x) \end{array} \right\} \tag{2}$$

wobei a, b, c, d reelle Konstanten sind.

In welchen Fällen können Sie das System (2) mit Hilfe der Differentialgleichung (1) lösen? (Sie müssen diese Lösungen nicht bestimmen.)

Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	**falsch**	
○	○	Für $a = 17, \quad b = 1, \quad c = 53, \quad d = 1.$
○	○	Für $a = 1, \quad b = 53, \quad c = 1, \quad d = 17.$
○	○	Für $a = 15, \quad b = 6, \quad c = 16, \quad d = 4.$
○	○	Für $a = 20, \quad b = -1, \quad c = 0, \quad d = -2.$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x - 2xy(x) + xy^2(x), \qquad y(0) = 0,$$

mittels Trennung der Variablen.

Hinweis: Klammern Sie x aus und verwenden Sie eine binomische Formel.

c) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y'(x) + x \cdot y(x) - e^{-\frac{x^2}{2}+2x} = 0. \tag{3}$$

i) Schreiben Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) mittels Variation der Konstanten.

5. (*8 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ mit

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y.$$

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

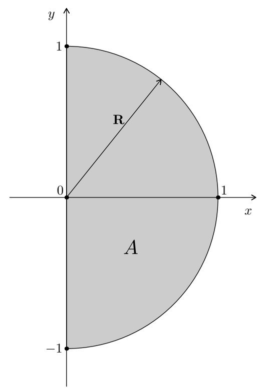
b) Entscheiden Sie **nur** für den kritischen Punkt mit positiver x-Koordinate, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum, oder einen Sattelpunkt handelt.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen G_f von f im Punkt $(0, 0, 0)$.

d) Bestimmen Sie x_0 so, dass der Punkt $(x_0, -2, 1)$ auf der Tangentialebene aus Teil **c)** liegt.

e) **MC-Aufgabe**

Die Fläche A sei die rechte Hälfte der Kreisscheibe um Null mit Radius $R = 1$.



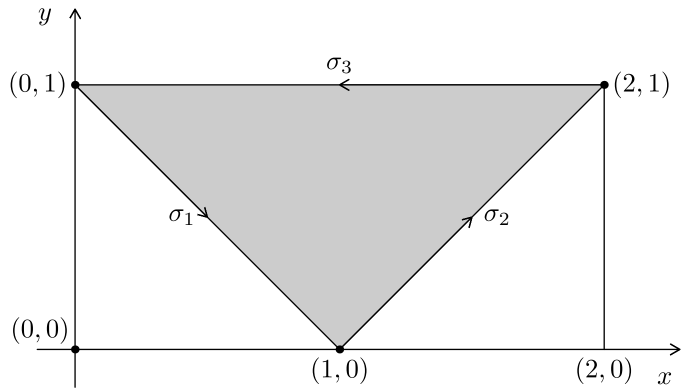
Welche der folgenden Integrale berechnen den Flächeninhalt von A?

Kreuzen Sie die entsprechende Antwort direkt **auf dem Aufgabenblatt** an.

richtig	falsch	
○	○	$\displaystyle\int\int_B 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.
○	○	$\displaystyle\int\int_B x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.
○	○	$\displaystyle\int\int_B 1 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$ mit $B = \{(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.
○	○	$\displaystyle\int\int_B r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$ mit $B = \{(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$.

6. (*12 Punkte*)

a)



In der Skizze oben sehen Sie drei ebene Kurven σ_1, σ_2 und σ_3, welche den Rand des dunklen Dreiecks beschreiben.

Geben Sie für σ_1, σ_2 und σ_3 jeweils eine Funktion an, welche die Kurve parametrisiert. Berücksichtigen Sie dabei die Durchlaufrichtung.

Schreiben Sie Ihre Antwort direkt **auf das Aufgabenblatt**:

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \left(\qquad\qquad \right), \qquad \underline{\qquad} \leq t \leq \underline{\qquad}$$

$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \left(\qquad\qquad \right), \qquad \underline{\qquad} \leq t \leq \underline{\qquad}$$

$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \left(\qquad\qquad \right), \qquad \underline{\qquad} \leq t \leq \underline{\qquad}$$

b) Gegeben seien drei ebene Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 parametrisiert durch

$$\gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Zeichnen Sie die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3 in ein Koordinatensystem. Geben Sie dabei auch jeweils die Durchlaufrichtung an.

c) Seien γ_1, γ_2 und γ_3 die Kurven aus Teilaufgabe **b)**.

Durchlaufen wir erst γ_1, dann γ_2 und dann γ_3, erhalten wir eine geschlossene Kurve γ.

Sei $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$K : (x, y) \mapsto K(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (2x + y\sin(2xy), 2y + x\sin(2xy)).$$

i) Berechnen Sie mit der Formel von Green das Kurvenintegral für das Vektorfeld K entlang γ:

$$\oint_\gamma K \cdot d\gamma = \oint_\gamma (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy.$$

ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral für das Vektorfeld K entlang γ_1

$$\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy.$$

iii) Das Kurvenintegral für K entlang γ_3 ist gleich -1, $\int_{\gamma_3} K \cdot d\gamma = -1$. Verwenden Sie dies und Ihre Ergebnisse aus i) und ii), um das Kurvenintegral für das Vektorfeld K entlang γ_2 zu berechnen:

$$\int_{\gamma_2} K \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} (2x + y\sin(2xy))dx + (2y + x\sin(2xy))dy.$$

Hinweis: Falls Sie i) und / oder ii) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $\oint_\gamma K \cdot d\gamma = 1$ und / oder $\int_{\gamma_1} K \cdot d\gamma = 0$.