Prof. Dr. E. W. Farkas **ETH Zürich, August 2013**

BIOL-B GES+T PHARM

Lösungen zu Mathematik I/II

---

1. (*10 Punkte*)

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^2+1}{3x^4+x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

b) Wir wenden zweimal L'Hôpital an sodass

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\,\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{1}{2}.$$

c) Durch Raten finden wir die Nullstelle $x_1 = 1$. Polynomdivision liefert

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2),$$

und wir finden die weiteren Nullstellen $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$.

d) Mit

$$f(x)=(\cos x)^x=e^{x\ln(\cos x)}$$

und der Kettenregel folgt

$$f'(x)=\left(\ln(\cos x)-\frac{x}{\cos x}\sin x\right)(\cos x)^x$$

e) Durch partielles Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2\,\ln(x)\,dx&=\frac{1}{3}x^3\,\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2\,dx\\&=\frac{1}{3}x^3\,\ln(x)-\frac{1}{9}x^3+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

f) Es ist leicht zu verifizieren dass

$$\frac{e^{-x}}{1+x^3}=1-x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3).$$

Deshalb gilt

$$a_0=1,\quad a_1=-1,\quad a_2=\frac{1}{2}.$$

g) Es ist

$$f'(x) = e^x - 1 > 0$$

falls $x > 0$, somit ist f auf $]0, \infty[$ streng monoton wachsend.

2. (*10 Punkte*)

a) $z = (1+i)^4 - 2i = (2i)^2 - 2i = -4 - 2i$. Also $\mathrm{Re}(z) = -4$ und $\mathrm{Im}(z) = -2$.

b)

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 5\left(\cos\tfrac{1}{2} - i\sin\tfrac{1}{2}\right) = 5\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+2\pi)i}, \quad z_3 = i\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

c)

$$\left(\frac{1-3i}{i-2}\right)^6 = (-1+i)^6 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^6 = 8\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{2}i} = 8i.$$

d) Die Lösungen lauten $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -1 + (1+\sqrt{3})i$ und $z_3 = -1 + (1-\sqrt{3})i$.

3. (*10 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

- richtig. Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- falsch. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar da $\mathrm{Rang}(A) = 2 < 3 = \mathrm{Rang}(A|b)$.
- falsch. Man betrachte $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- richtig: ist d die n-te Spalte von B so ist der $n-te$ Einheitsvektor eine Lösung von $Bx = d$.

b) Die Matrix ist singulär (Addition der ersten beiden Reihen ergibt die dritte). Also ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 3 \\ 6 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)((-5-\lambda)(1-\lambda) - 3) - 2((-5-\lambda)(-2) - 18) \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 12). \end{aligned}$$

Die übrigen Eigenwerte sind demnach $\lambda = -1 \pm \sqrt{13}$.

c) Es gilt $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 8 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = t^2 - 8$. Für $t \neq \pm\sqrt{8}$ sind die Vektoren also linear unabhängig.

d) Gauss-Algorithmus ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 3 & 8 & 4a+1 & 2 \\ -2 & a-6 & a^2+1 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & a & (1+a)^2 & -1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & (1+a)(1+2a) & -(1+a) \end{array}\right).$$

Für $a = -1$ erhält man unendlich viele Lösungen, für $a = -1/2$ keine Lösung (betrachte die letzte Zeile) und für $a \neq -1, -1/2$ genau eine Lösung.

4. (*12 Punkte*)

a)

i) RICHTIG. Das folgt direkt aus der obigen DGL

ii) FALSCH. Für $a = 0$ stimmt es nicht!

iii) RICHTIG. Das folgt direkt aus der obigen DGL

iv) FALSCH. Die allgeine Lösung lautet $C_1 + C_2 e^{-(3/2)x}$

b) Durch Teilen sehen wir dass

$$x^2 y'(x) = y(x)^2 - xy(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 - \frac{y(x)}{x} + 1.$$

Wir benutzen die Substitution $u(x) := \frac{y(x)}{x}$. Da $y'(x) = u'(x)x + u(x)$ erhalten wir durch Einsetzen

$$u'(x)x + u(x) = u(x)^2 - u(x) + 1.$$

Durch Umformen folgt

$$\frac{u'(x)}{\big(u(x)-1\big)^2} = \frac{1}{x}.$$

Mittels Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{du}{\big(u-1\big)^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Wir substituieren $v = u - 1$ und es folgt

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

Daraus folgern wir

$$-\frac{1}{v(x)} = \ln|x| + \ln|C|$$

und somit

$$v(x) = -\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Durch die erste Rücksubstitution finden wir

$$u(x) = 1 + v(x) = 1 - \frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Durch die zweite Rücksubstitution finden wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = xu(x) = x - \frac{x}{\ln|Cx|}.$$

Durch den Anfangswert $y(2) = 0$ folgt dass $C = \frac{1}{2}e$ und somit lautet die Lösung

$$y(x) = x - \frac{x}{\ln(\frac{1}{2}e|x|)} = x - \frac{x}{\ln(\frac{1}{2}|x|) + 1}.$$

c) i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) + 2\sin(x)\cos(x)y(x) = 0.$$

Via Separation der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Lösung der homogenen DGL von der Form

$$y_{hom}(x) = Ke^{\cos(x)^2}$$

ist.

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{allg}(x) = K(x)e^{\cos(x)^2}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{allg}(x) = K'(x)e^{\cos(x)^2} - 2K(x)\cos(x)\sin(x)e^{\cos(x)^2}.$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{\cos(x)^2} - 2K(x)\cos(x)\sin(x)e^{cos(x)^2} + 2\sin(x)\cos(x)K(x)e^{\cos(x)^2} - e^{\cos(x)^2 - x} = 0.$$

Daraus folgern wir dass

$$K'(x) = e^{-x}$$

und deshalb gilt

$$K(x) = -e^{-x} + \tilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatzes schliessen wir

$$y_{allg}(x) = (-e^{-x} + \tilde{K})e^{\cos(x)^2} = \tilde{K}e^{\cos(x)^2} - e^{\cos(x)^2 - x}.$$

5. (*8 Punkte*)

a) Es gilt

i) richtig. $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 0$.

ii) falsch. Es gilt

$$f_{xx}(-2,-1)f_{yy}(-2,-1) - f_{xy}^2(-2,-1) = 2(-12+12) - 16 < 0,$$

also ist $(-2,-1)$ ein Sattelpunkt.

iii) falsch. Analog wie ii).

iv) richtig, denn

$$f_{xx}(2,1)f_{yy}(2,1) - f_{xy}^2(2,1) = 2(-12+12) - 16 < 0.$$

b) Die Gleichung der Tangentialebene von $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ ist gegeben durch

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0).$$

Wir haben $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 7$. Also ist die Gleichung der Tangentialebene gegeben durch

$$z = 6x + 7y - 6.$$

c) Wir verwenden die Lagrangemultiplikatormethode mit

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-1).$$

Partiell Ableiten nach x, y und λ und Nullsetzen ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3(x+2y)^2 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 6(x+2y)^2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Man erhält nacheinander die Lösungen
$(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$, $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$, $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$.
Dies sind die kritischen Punkte.

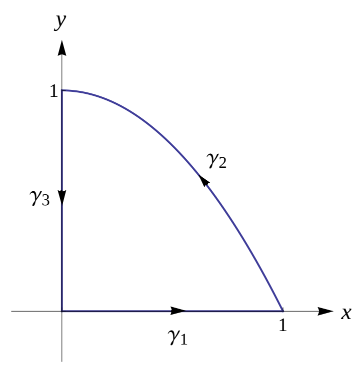
Durch Berechnen der Funktionswerte $f(x,y)$ an diesen Stellen erhält man, dass $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 1$ seinen Maximalwert $5\sqrt{5}$ an der Stelle $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ und seinen Minimalwert $-5\sqrt{5}$ an der Stelle $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ annimmt.

6. (*10 Punkte*)

a)

$$\sigma_1 : t \mapsto \sigma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad -1 \leq t \leq 1$$
$$\sigma_2 : t \mapsto \sigma_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$
$$\sigma_3 : t \mapsto \sigma_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

b) i)



ii) Für die Rechnung benötigen wir

$$P_y(x,y) = 1$$

und

$$Q_x(x,y) = 2x.$$

Nach der Green'schen Formel ist nun der Wert des gesuchten Kurvenintegrals gleich dem Integral von $Q_x - P_y$ über die eingeschlossene Fläche B. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma K \cdot d\gamma &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} 2x - 1 dy dx \\
&= \int_0^1 2xy - y \Big|_0^{1-x^2} dx \\
&= \int_0^1 2x - 2x^3 - 1 + x^2 dx \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

iii)

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
I_2 &= \int_0^1 -(1-t) - 1 + (1-t)^2 + 2(1-t)^3\,dt \\
&= -2t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}(1-t)^3 - \frac{1}{2}(1-t)^4\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \\
I_3 &= \int_0^1 0\,dt = 0.
\end{aligned}
$$